

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

MÁRCIO ANTÔNIO DUARTE

**Sobre convexidade em prismas
complementares**

Goiânia
2015

MÁRCIO ANTÔNIO DUARTE

Sobre convexidade em prismas complementares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

Área de concentração: Teoria da Computação .

Orientador: Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

Co-Orientador: Prof. Dr. Jayme L. Szwarcfiter

Goiânia
2015

MÁRCIO ANTÔNIO DUARTE

Sobre convexidade em prismas complementares

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação, aprovada em 10 de Abril de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

Instituto de Informática – UFG

Presidente da Banca

Prof. Dr. Horacio Hideki Yanasse

Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP

Profa. Dra. Carla Silva Oliveira

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE

Profa. Dra. Erika Moraes Martins Coelho

Instituto de Informática – UFG

Prof. Dr. Hebert Coelho da Silva

Instituto de Informática – UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Márcio Antônio Duarte

Possui graduação em Ciência da Computação pela Universidade Federal de Goiás (2001) e mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Uberlândia (2006). Atualmente é professor assistente na Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão, da Unidade Acadêmica Especial de Biotecnologia, no curso de Ciências da Computação, atuando nas áreas de Software Básico e Teoria da Computação.

Dedico este trabalho aos meus pais,
que sempre me apoiaram
e estiveram ao meu lado.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida, pela esperança e fé depositadas em mim, as quais nunca me deixaram desistir, e também por permitir que eu participasse desse encontro com pessoas que puderam engrandecer minha caminhada.

Agradeço aos meus pais Antônio e Helena, pela educação que me propiciaram, pois sem ela, não teria chegado até aqui. A minha tia Orlanda, que durante o período de estadia em Goiânia foi como uma mãe para mim.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Rommel Barbosa e Jayme Szwarcfiter, pelo apoio, confiança e orientações.

Aos amigos do INF, principalmente a Márcia, Leila, Elisângela e Walid, por termos participado e lutado juntos nessa jornada. Em especial a Profa. Erika, que se fez amiga e que por várias vezes dedicou seu tempo e paciência para me ajudar nos estudos.

Um agradecimento especial ao Prof. Dieter Rautenbach e Profa. Lúcia Penso, que me receberam com carinho na Alemanha e que muito contribuíram com a minha pesquisa.

Agradeço ao CNPQ pelo incentivo a essa pesquisa.

Por fim, quero agradecer a todos que me acompanharam direta ou indiretamente a transformação desse sonho em realidade.

É um grande erro teorizar antes das provas, já que predispõe à capacidade de julgar.

Arthur Conan Doyle,
Escritor inglês, 1859/1930.

Resumo

Duarte, Márcio Antônio. **Sobre convexidade em prismas complementares**. Goiânia, 2015. 67p. Tese de Doutorado . Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados relacionados, principalmente às propriedades algorítmicas e de complexidade de um produto de grafos chamado prisma complementar. Respondendo algumas questões deixadas em aberto por Haynes, Slater e van der Merwe, mostramos o problema de clique, conjunto independente e conjunto com k -dominantes é NP-Completo para prismas complementares em geral. Além disso, mostramos resultados de NP-completude em relação ao cálculo de alguns parâmetros da convexidade P_3 para o prisma complementar de grafos em geral, como o número P_3 , número envoltório P_3 e número de Carathéodory. Mostramos que o cálculo do número P_3 é NP-completo para o prisma complementar de grafos em geral. Já para o número envoltório P_3 , mostramos que o mesmo pode ser calculado de forma eficiente em tempo polinomial. Para o número de Carathéodory, mostramos que é NP-completo para os prismas complementares de grafos bipartidos, mas que para árvores, este pode ser calculado em tempo polinomial e ainda, para classe dos cografos, o cálculo do número de Carathéodory do prisma complementar desses é 3. Encontramos também, uma relação entre a cardinalidade de um conjunto de Carathéodory de um grafo qualquer e um conjunto de Carathéodory do seu prisma complementar. Por fim, estabelecemos um limite superior do cálculo dos parâmetros: número geodésico, número envoltório e número de Carathéodory para operações prisma complementar de grafos caminho, ciclos e completos considerando as convexidades P_3 e geodésica.

Palavras-chave

Teoria dos Grafos, Convexidade, NP-Completo, Prismas Complementares

Abstract

Duarte, Márcio Antônio. **Results on Convexity Complementary Prisms**. Goiânia, 2015. 67p. PhD. Thesis. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we present some related results, especially the properties algorithmics and of complexity of a product of graphs called complementary prism. Answering some questions left open by Haynes, Slater and van der Merwe, we show that the problem of click, independent set and k -dominant set is NP-Complete for complementary prisms in general. Furthermore, we show NP-completeness results regarding the calculation of some parameters of the P_3 -convexity for the complementary prism graphs in general, as the P_3 -geodetic number, P_3 -hull number and P_3 -Carathéodory number. We show that the calculation of P_3 -geodetic number is NP-complete for complementary prism graphs in general. As for the P_3 -hull number, we can show that the same can be efficiently computed in polynomial time. For the P_3 -Carathéodory number, we show that it is NP-complete complementary to prisms bipartite graphs, but for trees, this may be calculated in polynomial time and, for class of cografos, calculating the P_3 -Carathéodory number of complementary prism of these is 3. We also found a relationship between the cardinality Carathéodory set of a graph and a any Carathéodory set of complementary prism. Finally, we established an upper limit calculation the parameters: geodetic number, hull number and Carathéodory number to operations complementary prism of path, cycles and complete graphs considering the convexities P_3 and geodesic.

Keywords

Graph Theory, Convexity, NP-Complete, Complementary Prisms

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	11
Lista de Notações	12
1 INTRODUÇÃO	13
2 PRELIMINARES	17
2.1 Definições e Notação	17
2.2 Classes de Grafos	19
2.3 Convexidade em Grafos	20
3 PRISMAS COMPLEMENTARES E RESULTADOS INICIAIS	25
3.1 Prismas Complementares	25
3.2 NP-completude	26
4 CONVEXIDADE EM PRISMAS COMPLEMENTARES	30
4.1 Número P_3	32
4.2 Número envoltório P_3	36
4.3 Número de Carathéodory	43
4.4 Sobre Cografos	48
4.5 Número geodésico	51
4.6 Número envoltório	55
5 CONCLUSÕES	60
Referências Bibliográficas	62

Lista de Figuras

2.1	Componentes Conexas do Grafo \bar{G}	19
2.2	Componentes Conexas do Grafo G	20
2.3	Conjuntos convexos - (i) conjunto geodésico (ii) monofônico (iii) triangular (iv) P_3	24
2.4	Grafo G , para $S = \{a, d\}$, temos $I[S] = \{a, \bar{a}, b, c, d, \bar{d}, e, f\}$	24
3.1	Prisma Complementar - $G\bar{G}$, onde $G = C_5$ e $G\bar{G}$ é o Grafo de Petersen	26
3.2	$G\bar{G}$ tem uma clique de ordem $n + 2 + k$.	28
3.3	$G\bar{G}$ tem um conjunto independente de ordem k .	29
3.4	$G\bar{G}$ tem um conjunto d -dominante de ordem $k + d^2$	29
4.1	Número P_3 para $K_3\bar{K}_3$, $K_4\bar{K}_4$ e $K_5\bar{K}_5$	33
4.2	Número P_3 para prismas complementares $P_n\bar{P}_n$, com $n \geq 2$.	34
4.3	Número P_3 para prismas complementares $C_n\bar{C}_n$, com $n \geq 4$	36
4.4	(i) G tem k componentes com $k \geq 2$, então $h_{p_3}(G\bar{G}) = k + 1$	38
4.5	(ii) Se $ V_2 \leq 1$ - G e \bar{G} são conexos, então $h_{p_3}(G\bar{G}) \leq 5$	38
4.6	(ii) Se $ V_2 \geq 2$ - G e \bar{G} são conexos, então $h_{p_3}(G\bar{G}) \leq 5$	39
4.7	Número envoltório P_3 para $K_3\bar{K}_3$, $K_4\bar{K}_4$ e $K_5\bar{K}_5$	40
4.8	Número envoltório P_3 para $C_n\bar{C}_n$, com $n = 7$ e $n = 8$.	41
4.9	Número envoltório P_3 para $C_n\bar{C}_n$, com $4 \leq n \leq 6$	41
4.10	Número envoltório P_3 para $P_n\bar{P}_n$	42
4.11	Grafo Bipartido G obtido pela construção de uma intância de 3-SAT. Note que nem todos vértices são mostrados [3].	45
4.12	Número de Carathéodory - $G\bar{G}$ com altura $h \geq 3$.	47
4.13	Número geodésico - $K_n\bar{K}_n$	52
4.14	Número geodésico para prismas complementares $P_n\bar{P}_n$, com $n \geq 4$.	53
4.15	Número geodésico para prismas complementares $P_1\bar{P}_1$, $P_2\bar{P}_2$ e $P_3\bar{P}_3$	53
4.16	Número geodésico para prismas complementares $C_n\bar{C}_n$, com $4 \leq n \leq 8$	55
4.17	Número envoltório para $K_n\bar{K}_n$, com $3 \leq n \leq 5$	56
4.18	Número envoltório para prismas complementares $P_n\bar{P}_n$	58
4.19	Número envoltório para prismas complementares $C_n\bar{C}_n$, com $n = 6, 7$ e 8.	59
4.20	Número envoltório - $C_4\bar{C}_4$ e $C_5\bar{C}_5$	59

Lista de Tabelas

5.1	Caracterizações de n_{p3} , h_{p3} , c_{p3} , g_n e h_n para $K_n\bar{K}_n$, $P_n\bar{P}_n$ e $C_n\bar{C}_n$	61
-----	---	----

Lista de Notações

$V(G)$	conjunto de vértices do grafo G
$E(G)$	conjunto de arestas do grafo G
$A \setminus B$	elementos do conjunto A menos elementos do conjunto B
$ S $	cardinalidade do conjunto S
P_n	caminho com n vértices
C_n	ciclo com n vértices
K_n	grafo completo com n vértices
T	árvore
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo com partições de m e n vértices
$N_G(a)$	conjunto dos vértices adjacentes ao vértice a no grafo G
$N_G[a]$	$N(a) \cup \{a\}$
$d_G(v) = d(v)$	número $ E(v) $ de arestas incidentes ao vértice v
$d(v, w)$	tamanho do menor caminho entre v e w em um grafo G
$exc(v)$	máxima distância de v a qualquer vértice de um grafo G
$\alpha(G)$	número de independência do grafo G
$\delta(G)$	grau mínimo do grafo G
$\Delta(G)$	grau máximo do grafo G
$\gamma(G)$	número de dominação do grafo G
$G\bar{G}$	prisma complementar do grafo G
$G \square H$	produto Cartesiano de G e H
$n_{P_3}(G)$	número geodésico P_3 ou apenas número P_3 de um grafo G
$g_n(G)$	número geodésico de um grafo G
$h_{P_3}(G)$	número envoltório P_3 de um grafo G
$h_n(G)$	número envoltório de um grafo G
$c(G)$	número de Carathéodory de um grafo G
$I[S]$	intervalo fechado de um conjunto S
$I_{P_3}[S]$	intervalo P_3 de um conjunto S
$H_G(S)$	fecho convexo de S em G
$\partial H_G(S)$	fecho parcial de S em G

INTRODUÇÃO

Imagine um representante de uma instituição querendo realizar uma espécie de convocação coletiva que mobilize o maior número de pessoas possíveis a participarem de uma manifestação. Suponhamos que por meio de uma rede social uma pessoa da sua lista de amigos seja convencida a participar dessa manifestação se ela tivesse dois amigos que a convencesse a isso. Então a pergunta natural seria: qual o menor número de pessoas a serem convocadas inicialmente para se alcançar a rede inteira?

Este tipo de questionamento pode ser respondido por meio dos parâmetros de convexidade em teoria dos grafos, onde os membros da rede social seriam representados por nós/vértices e o vínculo de amizade entre eles por arestas. No exemplo supracitado, o tipo de convexidade a ser trabalhada é a convexidade P_3 , já que são necessários dois amigos para convencer o terceiro. Encontrar o menor número de pessoas necessárias para realizar esta convocação seria o mesmo que encontrar o número envoltório de um grafo. Por outro lado, supondo que os amigos da rede social que foram convocados inicialmente participem da manifestação, mas não se interessam a convencer outros amigos a participarem, então o problema poderia ser resolvido por meio do número geodésico de um grafo.

O conceito de convexidade para teoria dos grafos, de certa forma, está relacionado aos conceitos e métodos de matemática discreta e contínua, já que existe uma analogia entre o conjunto de vértices de um grafo conexo e a distância entre vértices como um espaço métrico.

As propriedades de convexidade são importantes, pois elas surgem em diversas situações envolvendo conjuntos convexos, como por exemplo, em problemas de otimização. Ademais, a convexidade do conjunto viável desempenha um papel relevante para a existência de soluções ótimas, assim como para a estrutura do conjunto dessas, além de possibilitar a resolução de problemas de otimização numérica.

Conceitos geodésicos em grafos estão intimamente relacionados aos conceitos de convexidade. Os conceitos fundamentais que ocorrem em geometria, topologia e análise funcional são de conjuntos convexos.

Assim, dado um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto de vértices S de $V(G)$ é

denominado *convexo*, se S é igual ao conjunto de vértices em todos os caminhos mínimos entre pares de vértices de S [25]. Nesse caso, tratando-se de caminhos mínimos, estamos mencionando a *convexidade geodésica*, mas existem outros tipos de convexidade que consideram outros tipos de caminhos, como por exemplo, a convexidade P_3 .

Convexidade geodésica em grafos já foi estudada sobre diferentes aspectos como conjuntos geodésicos e números geodésico e envoltório por Cáceres, Hernando, Mora, Pelayo e Puetas [10, 11]. A convexidade P_3 foi apresentada por Centeno [16], mas o referido termo já havia sido abordado por outros pesquisadores, porém, com nomenclaturas distintas.

No início de nossos estudos conseguimos verificar que muitas pesquisas sobre convexidade envolvendo classes específicas de grafos já foram realizadas, sobretudo no que diz respeito a produtos de grafos. Entretanto, notamos que havia um tipo específico de produto de grafos, o qual não possuía abordagens referentes ao assunto de convexidade.

Esse tipo de produto, denominado prisma complementar, foi introduzido há pouco tempo por Haynes, Henning, Slater e van der Merwe [51], como sendo um tipo de um produto mais geral, o produto complementar, o qual generaliza também o produto cartesiano. Isso fez com que despertasse o interesse sobre esse tipo de produto de grafos, eis que existem inúmeros problemas ainda não investigados a seu respeito.

Em seu artigo inicial, Haynes et al. [51] estudaram parâmetros como graus, distâncias, independência e dominação relacionados a prismas complementares e apresentaram uma série de problemas em suas considerações finais. Além disso, os parâmetros relacionados a dominação e distância são considerados em [18,30,31,48,53,54,57,58,60], onde os principais limites, estruturas e valores para famílias específicas de grafos foram obtidos.

Respondendo algumas questões colocadas em Haynes et al. [51], Cappelle et al. [12] descreveram um algoritmo de reconhecimento de prismas complementares em tempo polinomial e Meierling et al. [61] estudaram ciclos e hamiltonicidade de prismas complementares.

Outro assunto interessante envolvendo conjuntos convexos é o Teorema de Carathéodory [13, 41]. Esse teorema afirma que todo ponto u no fecho convexo de um conjunto $S \subseteq R$ encontra-se no fecho convexo de um subconjunto F de S de ordem no máximo $d + 1$ [3]. Os aspectos estruturais e algorítmicos para o número de *Carathéodory* de árvores e grafos blocos foram caracterizados por Barbosa, Coelho et al 2010 [3]. Eles estabeleceram também limites superiores sobre o número de *Carathéodory* de grafos gerais e livres de $K_{1,3}$ além de terem provado que é NP-completo decidir para um dado grafo bipartido G e um dado número inteiro k , se o número de *Carathéodory* de G é pelo menos k .

Neste trabalho, respondemos os problemas de cliques, conjuntos independentes

e k -dominação propostos por Haynes et al. [51] para prismas complementares.

Em relação a convexidade P_3 , estabelecemos resultados sobre complexidade envolvendo os parâmetros número P_3 , número envoltório P_3 e número de Carathéodory e identificamos alguns casos solucionáveis de forma eficiente.

Além disso, descrevemos os resultados obtidos sobre a convexidade geodésica em grafos não direcionados, considerando apenas o número geodésico e o número envoltório.

Nossos resultados acerca das propriedades de prismas complementares foram apresentados ao Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCG 2014) [37], com o título "Remarks on Complementary Prisms" e aceito para apresentação no 13th Cologne-Twente Workshop on Graphs & Combinatorial Optimization (CTW 2015), com o título "The P_3 -Convexity in the Complementary Prism of a Graph" [39]. Um artigo completo foi aceito no Journal of Combinatorial Optimization (Duarte, Penso, Rautenbach e Souza, 2015) [38], com o título "Complexity Properties of Complementary Prisms".

Durante período na Alemanha, em conjunto (Duarte, Joos, Penso, Rautenbach e Souza, 2014) trabalhamos também com emparelhamentos máximos e emparelhamentos máximos induzidos, que resultou no artigo "Maximum Induced Matchings close to Maximum Matchings" submetido na Theoretical Computer Science [36]. Este foi aceito para apresentação no LAGOS 2015 com o título "On Graphs with Induced Matching Number Almost Equal to Matching Number" [69].

Antes de discorrermos sobre nossos resultados, apresentamos no Capítulo 2 conceitos básicos da teoria dos grafos utilizados para este estudo. Nesse mesmo capítulo, tem-se a descrição das classes de grafos analisadas durante a pesquisa e, por fim, uma breve exposição sobre convexidade em grafos.

No Capítulo 3 temos a definição da operação prisma complementar, que é justamente o foco deste trabalho, juntamente com os resultados iniciais obtidos no que diz respeito a NP-completude dos problemas de cliques, conjuntos independentes e k -dominação em prismas complementares.

O Capítulo 4 traz os principais resultados da pesquisa desenvolvida. Nele, está incluso parte do estudo realizado com o grupo da Universidade de Ulm, durante uma fase do doutorado realizado na Alemanha. Esse capítulo possui duas divisões, uma direcionada à convexidade P_3 e outra à convexidade geodésica.

Na primeira divisão são demonstrados os resultados obtidos sobre NP-completude para o número P_3 , número envoltório P_3 e o número de Carathéodory. Constatamos que apesar do cálculo do número envoltório P_3 ser NP-completo segundo Centeno et al. [17], nosso resultado implica que o número envoltório P_3 para prismas complementares pode ser determinado de forma eficiente. Quanto ao número de Carathéodory,

constatamos que o seu cálculo é NP-completo para prismas complementares de grafos bipartidos, porém, identificamos e caracterizamos que o mesmo é no máximo 3 para prismas complementares de cografos e que para a classe de prismas complementares de árvores ele pode ser calculado em tempo polinomial. Na segunda divisão mostramos a caracterização do número geodésico e número envoltório considerando a convexidade geodésica para prismas complementares dos grafos P_n , C_n e K_n .

O trabalho termina com nossas conclusões e com as propostas de pesquisas a serem realizadas futuramente, onde se pretende dedicar especificamente ao estudo de outros tipos de convexidades aplicadas as operações prismas complementares e, ainda, outros tipos de operações de produtos em grafos.

PRELIMINARES

Este capítulo está dividido em três seções. A primeira seção contém as definições usuais da teoria de grafos e a notação utilizada neste trabalho. Em geral, a notação segue [7] e [66]. Outras definições são apresentadas no decorrer do texto.

Posteriormente, apresentamos uma seção com as classes de grafos que são estudadas e por último, finalizamos o capítulo com uma seção sobre convexidade em grafos.

2.1 Definições e Notação

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas formadas por pares, não necessariamente distintos de $V(G)$. Denota-se a aresta que liga o vértice u ao vértice v por uv . Se existir a aresta uv , dizemos que o vértice u é adjacente ao vértice v e que a aresta uv é incidente a u e a v . Os pares de vértices que formam cada aresta são chamados *extremidades* ou *extremos* da aresta. Consideramos aqui grafos não orientados, simples e finitos.

O complemento de um grafo G , denotado por \bar{G} , possui o mesmo conjunto de vértices de G , e o conjunto de arestas complementares de G , ou seja, se a aresta uv existir em G , os vértice u e v não são adjacentes em \bar{G} , porém, se os vértices u e v não são adjacentes em G , a aresta uv pertence ao complemento de G .

Um *vértice universal* é aquele que é adjacente a todos os demais vértices do grafo a que ele pertence.

Um *laço* é uma aresta onde os extremos são iguais. Múltiplas arestas são arestas que possuem o mesmo par de extremos. Um *grafo simples* é um grafo que não possui laços ou múltiplas arestas.

O número de vértices de um grafo G é dito ser a ordem de G . Para simplificar a notação adotamos $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. O número $|E(v)|$ de arestas em um vértice v é o *grau* de v , aqui e apresentado por $d_G(v)$. O número $\delta(G) = \min\{d_G(v)|v \in V\}$ é o grau mínimo de G e o número $\Delta(G) = \max\{d_G(v)|v \in V\}$ é o seu grau máximo. Se todos os vértices de G

tem o mesmo grau k , então G é k -regular, ou simplesmente *regular*. Um grafo 3-regular é chamado *cúbico*.

A *vizinhança* de um vértice v , denotada por $N_G(v)$, ou simplesmente por $N(v)$ caso não haja ambiguidade, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v no grafo G . A vizinhança de um conjunto T de vértices no grafo G , denotada por $N_G(T)$, é o conjunto de vértices de G adjacentes a algum vértice de T . É denotado por $N[v]$ o conjunto $N(v) \cup \{v\}$. Um vértice v é dito ser vizinho de u se v pertence a vizinhança de u .

Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, denotado por $H \subseteq G$. Um subgrafo de um grafo G é um *subgrafo gerador* de G se o número de vértices do subgrafo for igual ao número de vértices do grafo.

Seja $V'(G')$, se $G' \subseteq G$ e G' contém todas as arestas $xy \in E(G)$ com $x, y \in V'$, então G' é um *subgrafo induzido* de G . Dizemos que $V'(G')$ *induz* ou *gera* G' em G e escrevemos $G' =: \langle V'(G') \rangle$. Portanto, se $U \subseteq V(G)$ é qualquer conjunto de vértices, então $\langle U \rangle$ denota o grafo sobre U cujas arestas são precisamente as arestas de G com extremos em U . Uma *clique* é um subgrafo induzido que é um grafo completo.

Se U é um conjunto qualquer de vértices (usualmente de G), nós escrevemos $G \setminus U$ para $\langle V(G) \setminus U \rangle$. Em outras palavras, $G \setminus U$ é obtido de G pela deleção de todos os vértices em $U \cap V(G)$ e suas arestas incidentes. Se $U = \{v\}$ é unitário, nós escrevemos $G \setminus v$ ao invés de $G \setminus \{v\}$. Ao invés de $G \setminus V(G')$ nós simplesmente escreveremos $G \setminus G'$.

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices, $\{u, v\}$ de G existir um caminho uv e desconexo caso contrário. Os *componentes* de um grafo G desconexo são seus subgrafos conexos maximais ou componentes conexas. Um *vértice de corte*, x , é um vértice de um grafo conexo G tal que $G \setminus \{x\}$ possui mais de um componente. Um *conjunto de corte*, S , é um conjunto de vértices tal que $G \setminus S$ possui mais de um componente. Um grafo G é k -conexo se o tamanho mínimo de um conjunto de corte, S , for pelo menos k ou $G \setminus S$ possuir apenas um vértice.

Um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices que tomados dois a dois são não adjacentes. O conjunto independente será maximal se a ele não puder adicionar vértices; será máximo se for o maior maximal possível.

A *distância* $d(v, w)$ em G de dois vértices v e w é o tamanho do menor caminho v - w em G ; se tal caminho não existe, fazemos $d(v, w) = \infty$. Denomina-se *excentricidade* de um vértice v à maior distância de v a qualquer vértice do grafo G , ou seja, $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V(G)\}$.

Um vértice v é um vértice *simplicial* se o grafo induzido por $N[v]$ for uma clique. Uma clique de um grafo G contendo pelo menos um vértice simplicial é denominado um *simplex* do grafo. Um grafo G é um *grafo simplicial* se todo vértice de G for um vértice simplicial ou for adjacente a um vértice simplicial.

Um *emparelhamento* em um grafo conexo $G = (V, E)$ é um conjunto de arestas

$M \subseteq E(G)$ tal que quaisquer duas arestas não compartilham um vértice. Um emparelhamento M é dito *perfeito* se cobre todos os vértices de G .

2.2 Classes de Grafos

Algumas classes de grafos que são definidas a seguir, aparecem continuamente no decorrer deste trabalho, como por exemplo, caminhos, ciclos, completos, árvores, cografos, bi-partidos, entre outras.

Um *caminho* é um grafo não vazio P onde $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ e $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$. O número de vértices de um caminho é o seu *tamanho*, e o caminho de tamanho k é denotado por P_k . O caminho de menor tamanho entre dois vértices é chamado de *geodésica*.

Se $P = x_0 \dots x_{k-1}$ é um caminho e $k \geq 3$, então o grafo $C = P + x_{k-1}x_0$ é chamado de *ciclo*. O ciclo de tamanho k é chamado de um k -*ciclo* e denotado por C_k .

Se todos os vértices de G são dois a dois adjacentes, então G é um *grafo completo*. Um grafo completo sobre n vértices é denotado por K_n .

Um grafo sem ciclos é chamado *floresta*. Uma floresta conexa é chamada *árvore*. Os vértices de grau 1 de uma árvore são denominados *folhas*.

Um *cografo* é um grafo G que não possui P_4 induzido. Seja G um cografo conexo, denote por u o número de vértices universais em G , ou seja vértices adjacentes a todos os vértices de G exceto a ele próprio. Considere agora \bar{G} , denote por $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_u, \dots, \bar{G}_t$ as componentes conexas de \bar{G} e por $G_1, \dots, G_u, \dots, G_t$ os subgrafos de G induzidos pelos conjuntos de vértices das respectivas componentes conexas de \bar{G} , onde $|V(G_i)| \geq 2$ quando $i > u$ (Figura 2.1). As seguintes considerações podem ser feitas: as componentes $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_u$ são vértices isolados em \bar{G} ; e as componentes G_1, \dots, G_u são vértices universais em G ; e em G os vértices de uma componente G_{u+i} , $i > 0$ são adjacentes a todos os demais vértices de $G \setminus G_{u+i}$ (Figura 2.2) [16].

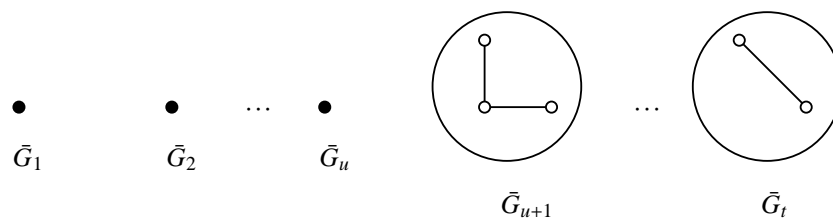


Figura 2.1: Componentes Conexas do Grafo \bar{G}

Seja $r \geq 2$ um inteiro. Um grafo G é chamado r -*partido* se $V(G)$ admite uma partição em r conjuntos independentes tal que cada aresta tem seus extremos em diferentes classes: vértices em uma mesma partição não podem ser adjacentes. Ao invés de

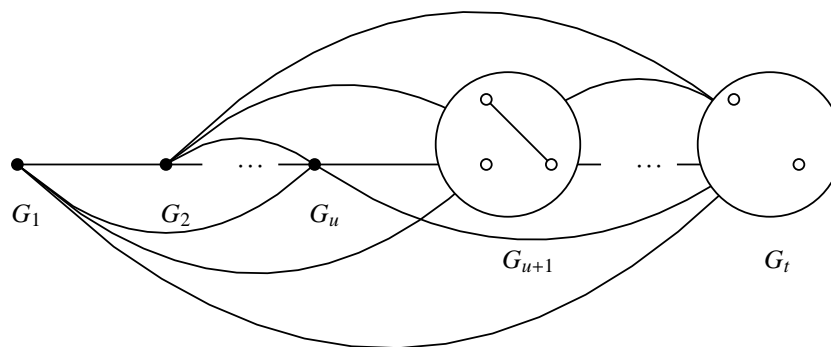


Figura 2.2: Componentes Conexas do Grafo G

2-partido nós costumamos dizer *bipartido*. Um grafo r -partido no qual cada dois vértices de diferentes partições são adjacentes é chamado de *completo*. Um grafo *bipartido completo* com partições de tamanho m e n será aqui denotado por $K_{m,n}$.

2.3 Convexidade em Grafos

Antes de definirmos a convexidade em grafos de uma forma geral, é relevante abordar sua história nos últimos anos baseada em Centeno et al. [16].

Uma das primeiras discussões sobre convexidade em grafos ocorreu em meados dos anos 70, com artigos publicados por Moon [62], de Erdős, Fried, Hajnal e Milner [42], e de Varlet [70], cujos trabalhos estavam relacionados à convexidade em torneios. Em 1981, Harary e Neiminen [50] voltam sua atenção à convexidade geodésica, a qual é definida em função do menor caminho entre dois vértices. Nos anos 80 algumas publicações sobre convexidade geodésica também foram feitas podendo ser citado o trabalho de Nieminen [63], que em 1982 usa a envoltória convexa para caracterizar árvores e grafos completos. Em 1983, Batten [4] caracteriza todos os grafos que possuem subgrafos geodésicos e formula um algoritmo para se construir tais grafos. Um subgrafo H de um grafo G é chamado geodésico se o menor caminho entre dois vértices de H pertence a H . Em 1985, Everett e Seidman [43], caracterizam grafos que possuem valores particulares do número envoltório geodésico, bem como formulam limites superior e inferior para tal parâmetro para os grafos conexos em geral. Após estes e outros artigos relacionados ao tema, Buckley e Harary [9], em 1990, publicam um livro sobre distância em grafos onde um capítulo inteiro é dedicado à convexidade geodésica. Outro extenso material sobre o assunto surge em 1993 [28], quando Van de Vel publica um livro sobre estruturas convexas.

O estudo da convexidade geodésica tem um novo impulso a partir do ano 2000, quando Chartrand, Harary, Zhang, entre outros voltam a publicar sobre a referida convexidade [22]. Entre 2002 e 2003, o grupo de pesquisadores citados acima publica

sobre características do número geodésico em grafos gerais e o número envoltório em grafos direcionados [21, 23–25]. Ainda neste período há publicações que discutem a complexidade do problema. Atici [1], em 2002, demonstra que achar o número geodésico é NP-Difícil para grafo gerais. Em contrapartida, Gimbel [47], em 2003, prova que o problema de encontrar o número de convexidade geodésica é NP-Completo para grafos gerais.

Nessa perspectiva, a partir de 2006, Dourado, Protti e Szwarcfiter, pesquisadores da Universidade Federal do Rio de Janeiro direcionam suas atenções à convexidade, obtendo resultados em torno da complexidade do número geodésico e número de convexidade geodésica para classes de grafos cordais, bipartidos e cografos. Descrevem também um método simples para decidir se o número de convexidade geodésica é igual a k , entre outros resultados que podem ser encontrados em [32]. Sobre o número envoltório geodésico, o grupo conseguiu provar que a determinação desse é um problema NP-Completo para grafos gerais, mas que este problema pode ser resolvido em tempo polinomial em grafos de intervalo unitário, cografos e grafos split [35]. Recentemente, em 2010, o grupo publicou sobre os limites do número envoltório geodésico usando ordem, diâmetro e cintura de um grafo [34].

Este grupo também trabalhou com a convexidade monofônica [33]. Na convexidade monofônica o conjunto P de caminhos é definido pelos caminhos induzidos de um grafo (caminhos que não possuem arestas entre dois vértices não consecutivos). A convexidade monofônica foi introduzida em Oklahoma, 1982 [59]. Ela foi estudada por Duchet, Farber e Jamison [40, 44]. Um grupo da Universitat Politècnica de Catalunya - Espanha deu especial atenção àquela convexidade evidenciando suas diversas propriedades por meio de grafos [15, 55, 56]. Atualmente sabe-se que o número de convexidade monofônica é um problema NP-Completo para grafos em geral e que o número envoltório monofônico pode ser encontrado em tempo polinomial para grafos gerais [33].

Por fim, merece ser mencionado que os pesquisadores citados também trabalharam com a convexidade de caminhos de comprimento dois. Essa convexidade, especificamente, começou a ser estudada a partir dos anos 90 quando Haglin e Wolf publicam sobre subconjuntos convexos em torneios em tal convexidade [49]. Em 2006, Parker, Westhoff e Wolf retomam os estudos sobre a convexidade de caminho de comprimento dois, mas nesse momento, em torneios bipartidos e torneios multipartidos [64, 65]. Todavia, foi a convexidade de caminho de comprimento dois em torneios juntamente com o problema da contaminação apresentado por Bollobás [6] e Balogh e Pete [2] que culminaram na convexidade P_3 .

Em 2012, Centeno [16] apresenta um estudo sobre o número de convexidade P_3 , o número P_3 e o número envoltório P_3 mostrando que para a classe de grafos gerais, tais problemas são NP-completos e que para as classes de árvores, cografos e certas grades

estes problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial. Centeno também obteve uma redução para os problemas de número P_3 e número de convexidade P_3 para a classe dos cordais, sendo que para o número envoltório P_3 foi desenvolvido um algoritmo de tempo polinomial. Além disso, Centeno desenvolveu um algoritmo para reconhecimento de grafos, onde o número P_3 fosse igual ao número envoltório P_3 , considerando os grafos livres de triângulos.

Também em 2012, Coelho [27] apresentou um estudo sobre convexidade P_3 para aspectos estruturais e algorítmicos de árvores e grafos blocos para o número de *Carathéodory*, onde também estabeleceu limites superiores sobre o número de *Carathéodory* para grafos gerais e livres de $K_{1,3}$, além de mostrar que é NP-completo o problema de encontrar o número de *Carathéodory* para grafos bipartidos.

Outros tipos de convexidade podem ser encontrados em outras obras dedicadas ao tema, no entanto, para que este trabalho não se delongue demasiadamente, aqui são apenas citadas [8, 19, 20].

Feitas as considerações iniciais e necessárias, definiremos de uma forma mais geral o que pode ser entendido sobre convexidade.

A convexidade sobre um conjunto finito X é uma família C de subconjuntos de X tal que:

- $\emptyset, X \in C$; e
- C é fechado sobre interseções.

O par (X, C) é chamado *espaço de convexidade (estrutura convexa)* e os subconjuntos de C são chamados *conjuntos convexos*. O *fecho convexo* de algum conjunto S , com relação à alguma convexidade C , é o menor conjunto convexo $H_C[S] \in C$ contendo S .

Uma analogia de convexidade em grafos pode ser definida considerando que o conjunto C é formado de subconjuntos de $V(G)$.

As convexidades mais naturais em um grafo são as convexidades de caminhos (um tipo de convexidade intervalada) definidas por um sistema P de caminhos em G . A escolha canônica para P são fornecidas pela seleção de todos os caminhos em G . Nesse caso, um subconjunto $C \in V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de P cujos vértices extremos estão também em C .

Uma *convexidade de intervalo* é definida a partir de um conjunto V e um inteiro k . Denote por $\binom{V}{k}$ o conjunto de todos os subconjuntos contendo k elementos de V , e por 2^V o conjunto de todos os subconjuntos de V .

Podemos dizer, então, que um espaço de convexidade finito (V, C) é uma convexidade de intervalo se existir uma função de intervalo $I : \binom{V}{k} \rightarrow 2^V$ tal que um subconjunto

C de V pertence a C se e somente se $I(\{x,y\}) \subseteq C$ para todo par distinto de elementos de C [16].

Algumas das convexidades trabalhadas em grafos estão contidas na convexidade de intervalo. Entre elas podemos citar a convexidade geodésica, convexidade monofônica, convexidade P_3 e a convexidade triangular.

Todas estas convexidades são definidas através de um conjunto P de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto $C \subseteq V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de P cujos vértices extremos estão também em C .

A *convexidade geodésica*, um dos focos deste trabalho, é baseada na seguinte definição. Seja (X, d) um espaço métrico. Um ponto $x \in X$ está geodesicamente entre dois pontos $a, b \in X$ se $d(a, x) + d(b, x) = d(a, b)$. Um conjunto $C \subseteq X$ é geodesicamente convexo desde que cada ponto entre dois nós de C esteja em C .

Desta forma, quando P é o conjunto de todos os caminhos mínimos em G então C é uma *convexidade geodésica*. Quando P é a coleção de todos os caminhos induzidos de G , dizemos que C é uma *convexidade monofônica*. E quando P é o conjunto de todos os caminhos de tamanho três, então C é uma *convexidade P_3* , que é a outra convexidade que também faz parte dos estudos deste trabalho.

Uma corda de um caminho P é uma aresta entre dois vértices não consecutivos. Cordas de um caminho que dão origem a triângulos são chamadas de cordas curtas do caminho. Um caminho que permite cordas apenas curtas é chamado de *caminho triangular* ou simplesmente um *t-caminho*. Dessa forma, a *convexidade triangular*, isto é, os conjuntos de *t-convexos*, é similarmente definida [27].

Exemplos das convexidades citadas anteriormente podem ser vistas na Figura 2.3, onde os vértices preenchidos correspondem ao fecho convexo de um conjunto S .

Para a convexidade de caminhos a função intervalo pode ser definida como se segue. Seja P um conjunto de caminhos de G . Um *intervalo fechado* para os vértices u, v denotado por $I[u, v]$, consiste de u, v e todos os vértices w_i que pertencem a um caminho $u-v$ em P . Assim, o intervalo fechado de $S \subseteq V(G)$, denotado por $I[S]$, é a união de todos os intervalos $I[u, v]$ para $u, v \in S$.

Como exemplo, tomemos o grafo G da Figura 2.4 e consideremos a convexidade geodésica. Assim, para $S = \{a, d\}$, temos que $I[S] = \{a, \bar{a}, b, c, d, \bar{d}, e, f\}$.

Alguns parâmetros de convexidade podem ser definidos a partir da função intervalo, como o número geodésico, envoltório e o Carathéodory, que são objeto de pesquisa e, por isso, serão estudadas em detalhes nas seções a diante.

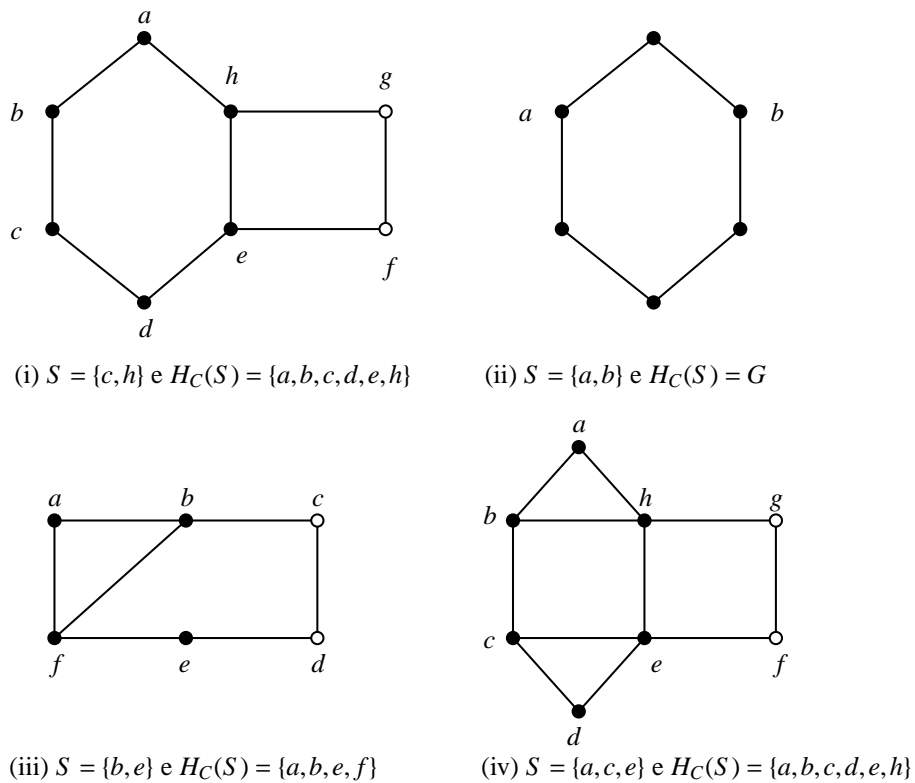


Figura 2.3: Conjuntos convexos - (i) conjunto geodésico (ii) monofônico (iii) triangular (iv) P_3

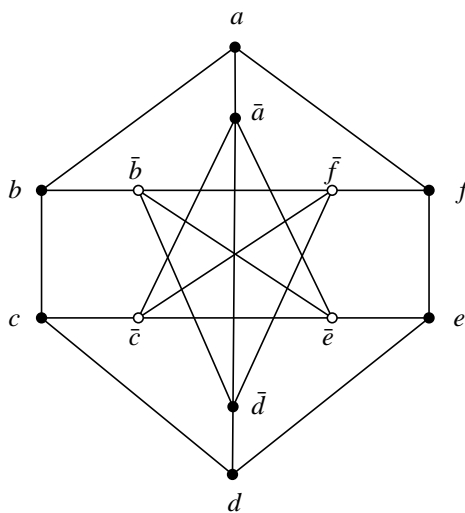


Figura 2.4: Grafo G , para $S = \{a, d\}$, temos $I[S] = \{a, \bar{a}, b, c, d, \bar{d}, e, f\}$

PRISMAS COMPLEMENTARES E RESULTADOS INICIAIS

Nesse capítulo, inicialmente, discorreremos a respeito do conceito das operações prismas complementares em grafos. Em seguida, respondemos algumas questões deixadas em aberto por [51] no que concerne às propriedades algorítmicas e de complexidade para prismas complementares relacionados aos problemas de cliques, conjuntos independentes e k -dominação.

3.1 Prismas Complementares

O complemento de G , denotado por \bar{G} é o grafo sobre $V(G)$ com conjunto de arestas da operação produto cartesiano $(V \square V) \setminus E$.

Haynes, Slater e van der Merwe [51] chamaram de *prisma complementar* o produto complementar $G \square K_2(S)$, com $|S| = 1$, denotado por $G\bar{G}$. Eles investigaram, para estes grafos, algumas propriedades como independência, distância e dominação. Haynes, Henning e van der Merwe [53] consideraram dominação e dominação total e Haynes, Holmes e Koessler [57] assim como Haynes et al. [54], investigaram dominação localizada.

Em outras palavras, sendo G um grafo e \bar{G} o seu complemento, o *prisma complementar* $G\bar{G}$ de G é o grafo formado a partir da união disjunta de $G \cup \bar{G}$, adicionando as arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes (mesmo rótulo) de G e \bar{G} .

A Figura 3.1 mostra o exemplo de prisma complementar do grafo C_5 , também conhecido como grafo de Petersen.

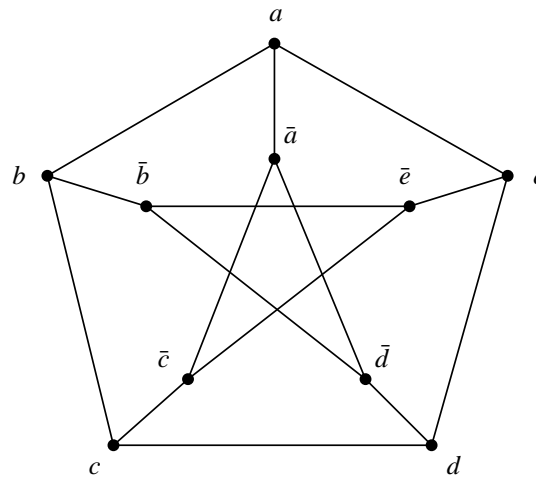


Figura 3.1: Prisma Complementar - $\overline{G\overline{G}}$, onde $G = C_5$ e $\overline{G\overline{G}}$ é o Grafo de Petersen

Nesse compasso, mostraremos a seguir os resultados iniciais sobre NP-completude em prismas complementares.

3.2 NP-completude

Quando decidimos estudar as propriedades algorítmicas e de complexidade para prismas complementares, percebemos que vários problemas envolvendo convexidade eram derivados de estudos antecedentes. A título de exemplificação, temos o cálculo do número P_3 , que coincide com o problema dos conjuntos 2-dominância que já havia sido estudado anteriormente, mas não para a classe dos prismas complementares.

Dessa forma, tivemos que desenvolver resultados que consolidassem a base para as provas algorítmicas e de complexidade de prismas complementares. Os primeiros resultados podem ser vistos adiante e eles respondem algumas questões relacionadas a cliques, conjuntos independentes, k -dominância propostas por Haynes et al. [51].

Na presente seção, provamos que dado um grafo G de ordem k , encontrar uma clique de ordem k , um conjunto independente de ordem k e um conjunto com k -dominantes é NP-Completo para prismas complementares em geral.

Teorema 3.1 [38] *Seja d um inteiro positivo. Para cada uma das três propriedades seguintes, é NP-completo decidir se um determinado par (G,k) , onde G é um grafo e k é um inteiro, tem a propriedade.*

(i) $G\overline{G}$ tem uma clique de ordem k .

(ii) $G\bar{G}$ tem um conjunto independente de ordem k .

(iii) $G\bar{G}$ tem um conjunto d -dominante de ordem k , que é, um conjunto D de vértices de $G\bar{G}$ tal que cada vértice u em $V(G\bar{G}) \setminus D$ tem pelo menos d vizinhos em D .

Prova: Todos os três problemas de decisão estão claramente em NP e continuam a reduzir problemas NP-completos conhecidos para os problemas indicados.

(i) Uma vez que é NP-completo decidir para dado um grafo G livre de triângulos e um inteiro $k \geq 4$, se G tem um conjunto independente de ordem k [67], o resultado desejado segue. Se G é um grafo livre de triângulos e $k \geq 4$, então G tem um conjunto independente de ordem k se e somente se $G\bar{G}$ tem uma clique de ordem k . Na verdade, se G tem um conjunto independente I de ordem k , então \bar{I} é uma clique de $G\bar{G}$ de ordem k completamente contida em $V(\bar{G})$. Inversamente, se $G\bar{G}$ tem uma clique K de ordem k , então a condição de livre de triângulo em G e $k \geq 4$ implicam que K está contido em $V(\bar{G})$, que é, $K = \bar{I}$ um conjunto independente I de G de ordem k .

(ii) Em vista da NP-completude do problema do conjunto independente usado em (i), o resultado desejado segue. Para um grafo G de ordem n e um inteiro k , o grafo G tem um conjunto independente de ordem k se e somente se o prisma complementar $H\bar{H}$ do grafo $H = G \cup K_{n+2}$ tem um conjunto independente de ordem $n + 2 + k$. Seja $V(H) = V(G) \cup K$, onde K é o conjunto de $n + 2$ vértices de H que induz uma componente completa de H . Se I é um conjunto independente de G de ordem k , então $I \cup \bar{K}$ é um conjunto independente de $H\bar{H}$ de ordem $n + 2 + k$. Inversamente, nós assumimos que $H\bar{H}$ tem um conjunto independente J de ordem $n + 2 + k$. Se J contém um vértice em $V(\bar{G})$, então $J \cap \bar{K} = \emptyset$. Desde que J contém pelo menos um vértice em K e, em vista do emparelhamento perfeito entre $V(G)$ e $V(\bar{G})$, no máximo n vértices em $V(G) \cup V(\bar{G})$, isto implica $|J| \leq n + 1 < n + 2 + k$. Assim, J não faz intersecção com $V(\bar{G})$. Se J contém um vértice u em K , então $\{J \setminus \{u\}\} \cup \{\bar{u}\}$ é um conjunto independente de $H\bar{H}$ da mesma ordem que J . Assim, podemos assumir que J não intersepta K . Isto implica que $J \setminus \bar{K}$ é um conjunto independente de G de ordem pelo menos $(n + 2 + k) - (n + 2) = k$, isto é, G tem um conjunto independente de ordem k .

(iii) Em vista da NP-completude do problema do conjunto d -dominante [52], o resultado desejado segue. Para um grafo G e um inteiro k , seja H a união disjunta de G com d cópias de K_d . Denote o conjunto de vértices dessas cópias d de K_d por V_1, \dots, V_d , que é, $V(H) = V(G) \cup V_1 \cup \dots \cup V_d$. Let $u_i \in V_i$ for $i \in [d]$. Vamos provar que o grafo G tem um conjunto d -dominante de ordem k se e somente se $H\bar{H}$ tem um conjunto d -dominante de ordem $k + d^2$. Se D é um conjunto d -dominante de G de ordem k , então $D \cup \bigcup_{i=1}^d (V_i \setminus \{u_i\}) \cup \{\bar{u}_i\}$ é um conjunto d -dominante de $H\bar{H}$ de ordem $k + d^2$. Agora seja

F um conjunto d -dominante de $H\bar{H}$ de ordem $k + d^2$. Uma vez que para cada i , o conjunto F contém ou todos vértices d de V_i ou pelo menos d vizinhos de um vértice em V_i , nós temos $|F \cap (V_i \cup \bar{V}_i)| \geq d$. Isto implica que $F' = (F \cap (V(G) \cup V(\bar{G}))) \cup \bigcup_{i=1}^d (V_i \setminus \{u_i\}) \cup \{\bar{u}_i\}$ é um conjunto d -dominante de $H\bar{H}$ de ordem pelo menos $k + d^2$. Como todos os vértices em $V(\bar{G})$ tem d vizinhos em F' , se F' contém um vértice \bar{u} in $V(\bar{G})$, então $(F' \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{u\}$ é um conjunto d -dominante de $H\bar{H}$ de ordem pelo menos $k + d^2$. Isto implica que podemos assumir que F' não faz interseção com $V(\bar{G})$. Assim $F' \cap V(G)$ é conjunto d -dominante de G de ordem pelo menos $(k + d^2) - d^2 = k$. \square

As Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 exemplificam as provas dos itens (i), (ii) e (iii) do Teorema 3.1.

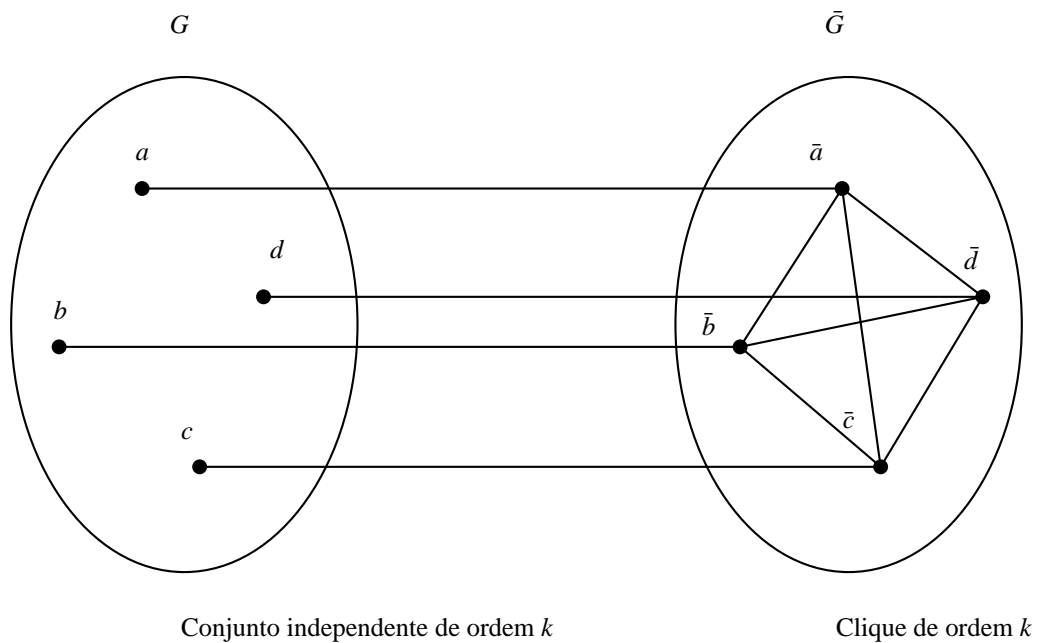


Figura 3.2: $G\bar{G}$ tem uma clique de ordem $n + 2 + k$.

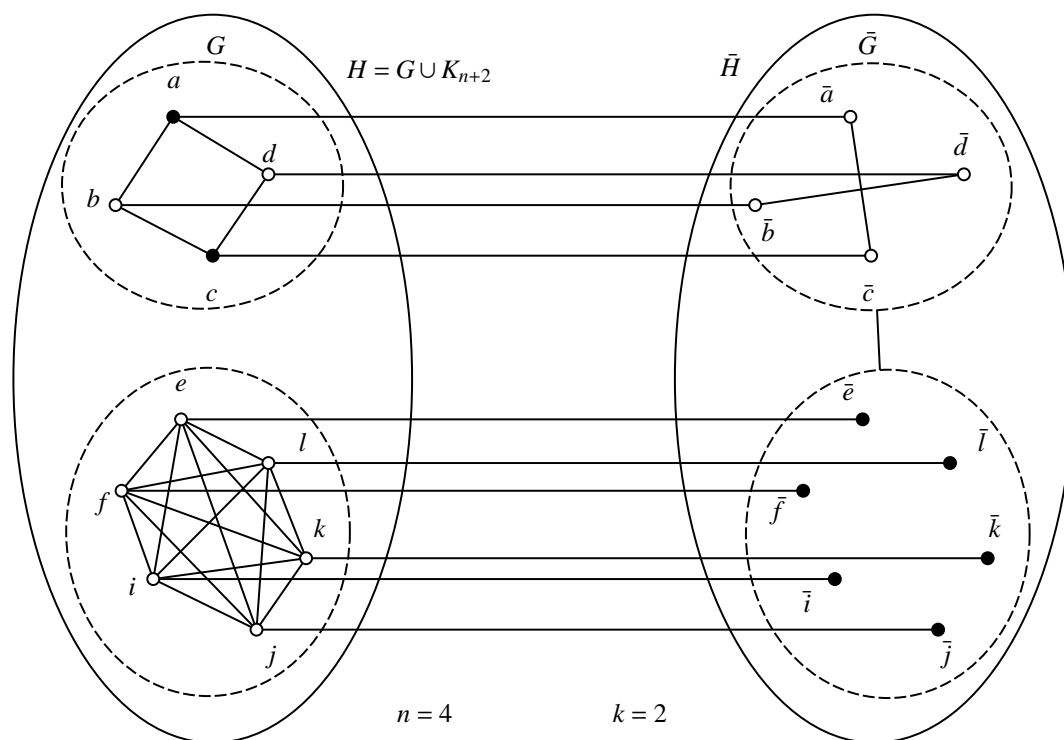


Figura 3.3: $G\bar{G}$ tem um conjunto independente de ordem k .

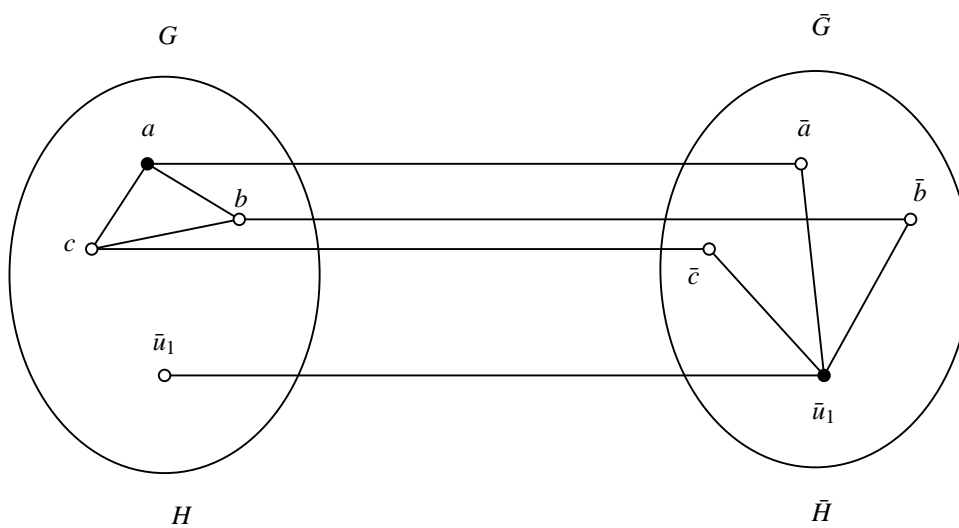


Figura 3.4: $G\bar{G}$ tem um conjunto d -dominante de ordem $k + d^2$

CONVEXIDADE EM PRISMAS COMPLEMENTARES

Como já abordado no Capítulo 2, a maioria das convexidades são definidas por meio de um conjunto P de caminhos em grafos, onde um subconjunto $C \in V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de P cujos vértices extremos também estão em C .

Quando P é o conjunto de todos os caminhos mínimos em G então C é uma convexidade geodésica. Para a convexidade geodésica os parâmetros mais estudados são o número geodésico e número envoltório, os quais fazem parte dos estudos deste trabalho.

Quando aplicada a caminhos de comprimento dois a convexidade é definida como convexidade P_3 e para esta convexidade estão sendo estudados parâmetros, como: número de convexidade P_3 , número de Radon, número P_3 , número envoltório P_3 e número de Carathéodory. Aqui nos restringimos aos três últimos parâmetros.

Para definirmos tais parâmetros em termos de convexidade é preciso entendermos os conceitos básicos de geodésica, intervalo fechado e intervalo P_3 .

Uma geodésica entre dois vértices u, v é exatamente um caminho mínimo entre u e v com comprimento $d(u, v)$. Esta nomenclatura simplifica a notação, assim como faz uma analogia com a geometria, como mostrado na Figura 2.3.

Para a convexidade geodésica, utilizamos a definição própria de intervalo fechado. Esta definição foi explorada no Capítulo 2, mas aqui reescrevemos essa, em função dos termos geodésicos.

Seja P um conjunto de caminhos. O intervalo fechado entre dois vértices u e v , considerando a convexidade geodésica, é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a alguma geodésica entre u e v . O intervalo fechado também pode ser denominado fecho geodésico. Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S] = \bigcup_{u, v \in S} I[u, v]$. Quando $I[S] = V(G)$, chamamos S de conjunto geodésico. No exemplo da Figura 2.4, seja $S_1 = \{a, d, \bar{b}, \bar{c}\}$ e $S_2 = \{a, d, \bar{b}\}$, o conjunto S_1 é um conjunto geodésico, já o conjunto S_2 não, pois $I[S_2] = \{a, b, c, d, e, f, \bar{a}, \bar{b}, \bar{d}\}$.

Por outro lado, a convexidade P_3 é baseada em função do intervalo P_3 , que será

definida nas próximas linhas. O intervalo P_3 entre dois vértices u e v , $I_{P_3}[u, v]$, consiste de u , v e todos os vértices dos caminhos de comprimento dois entre o par de vértices u , v . Sendo assim, o intervalo P_3 de um conjunto de vértices S , $I_{P_3}[S]$, é a união de todos $I_{P_3}[u, v]$ para $u, v \in S$.

Note que dado um conjunto S de vértices, a operação intervalo P_3 pode ou não adicionar vértices a este. Tomemos como exemplo a Figura 2.4, onde se escolhermos os vértices $\{a, d\} \in S$, o $I_{P_3}[S]$ será o próprio conjunto S , pois não há como adicionar vértices já que não existe caminhos de tamanho três entre o par de vértices a e d . Outro caso em que o $I_{P_3}[S]$ é o próprio conjunto S é quando todos os vértices que estão em um caminho de comprimento dois entre os vértices de S já pertencem a S . Um exemplo disso, seria a escolha dos vértices $\{a, b, c\} \in S$ na Figura 2.4. Quando isso ocorre dizemos que S é um conjunto P_3 convexo. Para $S = \{a, c, \bar{e}\}$, note que $I_{P_3}[S] = I_{P_3}[a, c] \cup I_{P_3}[a, \bar{e}] \cup I_{P_3}[c, \bar{e}]$, ou seja, $I_{P_3}[S] = \{a, b, c\} \cup \{a, \bar{a}, \bar{e}\} \cup \{c, \bar{c}, \bar{e}\}$, logo $I_{P_3}[S] = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{c}, \bar{e}\}$.

Em outras palavras, o intervalo P_3 de um conjunto S são todos os vértices de S mais todos os vértices que possuem dois vizinhos em S . Para um vértice que possui dois vizinhos em S é dito que o vértice está satisfeito, ou que o conjunto S satisfaz o vértice [16].

Uma vez realizadas as conceituações e a base sobre conjuntos geodésicos e P_3 , podemos dar continuidade aos conceitos dos parâmetros citados anteriormente. Desse modo, passamos a apresentar os conceitos para número geodésico, número envoltório, número P_3 , número envoltório P_3 e número de Carathéodory, onde faremos menção a cada um destes sobre os resultados encontrados para a classe dos prismas complementares.

De início, são mostrados os resultados de NP-completude para o número P_3 , número envoltório P_3 e o número de Carathéodory usando a convexidade P_3 , assim como a caracterização destes para a classe dos prismas complementares dos grafos P_n , C_n e K_n . Desse estudo podemos constatar que enquanto o cálculo do número envoltório P_3 é NP-completo [17], nosso resultado implica que o número envoltório P_3 de prismas complementares pode ser determinado de forma eficiente, o que é supreendente. Em relação ao número de Carathéodory também conseguimos um resultado interessante, onde mostramos que o seu cálculo é NP-completo para prismas complementares, mas em uma análise detalhada identificamos e caracterizamos que o número de Carathéodory do prisma complementar de um cografo é no máximo 3. O estudo da complexidade desses parâmetros em relação a convexidade P_3 , deu-se principalmente pela correspondência dos resultados encontrados inicialmente mostrados no Capítulo 3.

Por fim, encerramos o capítulo com a caracterização do número geodésico e número envoltório considerando a convexidade geodésica para os prismas complementares dos grafos P_n , C_n e K_n .

4.1 Número P_3

Nesta seção mostraremos que o problema de determinar o número P_3 para prismas complementares também é NP-completo e, posteriormente, mostramos suas caracterizações para prismas complementares de grafos K_n , P_n e C_n .

Se utilizarmos a operação intervalo P_3 , podemos definir o parâmetro número P_3 , que segue de maneira similar, a definição de conjunto geodésico e número geodésico. Um conjunto S de vértices de um grafo conexo G é chamado *conjunto P_3* de G se $I_{P_3}[S] = V(G)$. Um conjunto P_3 de cardinalidade mínima é um conjunto P_3 mínimo. A cardinalidade de um conjunto P_3 mínimo é chamada de *número P_3* , denotado por $n_{P_3}(G)$. Na Figura 2.4 um conjunto P_3 mínimo é $S = \{a, \bar{b}, \bar{c}, d, e\}$, o que faz com que $n_{P_3}(G) = 5$.

O que pretendemos elucidar é que um conjunto P_3 de G é um conjunto D de vértices de G tal que todos vértices em $V(G) \setminus D$ se encontram em caminhos de tamanho 3 cujas folhas estão em D , isto é, os conjuntos P_3 coincidem com os conjuntos 2-dominância.

Portanto, o Teorema 3.1 (iii) implica que o cálculo do número P_3 , que é a mínima cardinalidade de um conjunto P_3 , é NP-Completo para prismas complementares.

Para um grafo G , um conjunto C de vértices de G é *P_3 -convexo*, se nenhum vértice em $V(G) \setminus C$ tem pelo menos 2 vizinhos em C . Em outras palavras, C contém todos os vértices que se encontram em caminhos de ordem 3 cujas folhas estão em C .

Na verdade o problema do número P_3 nada mais é que o bem conhecido problema de 2-Dominância. Ou seja, todo vértice de G que não pertence ao subconjunto de vértices S deve ter pelo menos dois vizinhos em S . Esse problema foi amplamente estudado e muito se sabe sobre sua relação com conjunto independente, grau mínimo e ordem de G [16]. Sobre essa relação pode-se ler nos artigos [5, 14, 26, 29, 45, 46, 68], entre outros.

Não obstante a vasta literatura sobre o tema 2-Dominância, apresentamos nosso estudo sobre as caracterizações do número P_3 para a operação prisma complementar de grafos completos, ciclos e caminhos.

Teorema 4.1 *Considere o grafo completo K_n , então $n_{P_3}(K_n \bar{K}_n) = n + 1$.*

Prova.

Considere $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{K}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = K_n \bar{K}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(K_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{K}_n)$.

Seja S o conjunto P_3 de G . Primeiramente temos que qualquer vértice simplicial de um grafo G pertence a um conjunto P_3 . Como $V(\bar{K}_n)$ é um conjunto de vértices simpliciais de G , logo $|S| \geq n$. Porém, note que $I_{P_3}[V(\bar{K}_n)] \neq V(G)$. Para que $I_{P_3}[S] = V(G)$ é necessário a inclusão de um vértice $u_i \in K_n$. Sem perda de generalidade, seja $S =$

$\{V(\bar{K}_n)\} \cup \{u_1\}$. Observe que $\{u_i u_1, u_i \bar{u}_i\} \in E(G)$, para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, então $I_{P_3}[S] = V(G)$. Como $|S| = n + 1$, logo $n_{P_3}(K_n \bar{K}_n) = n + 1$.

□

A Figura 4.1 ilustra alguns exemplos relacionados ao Teorema 4.1.

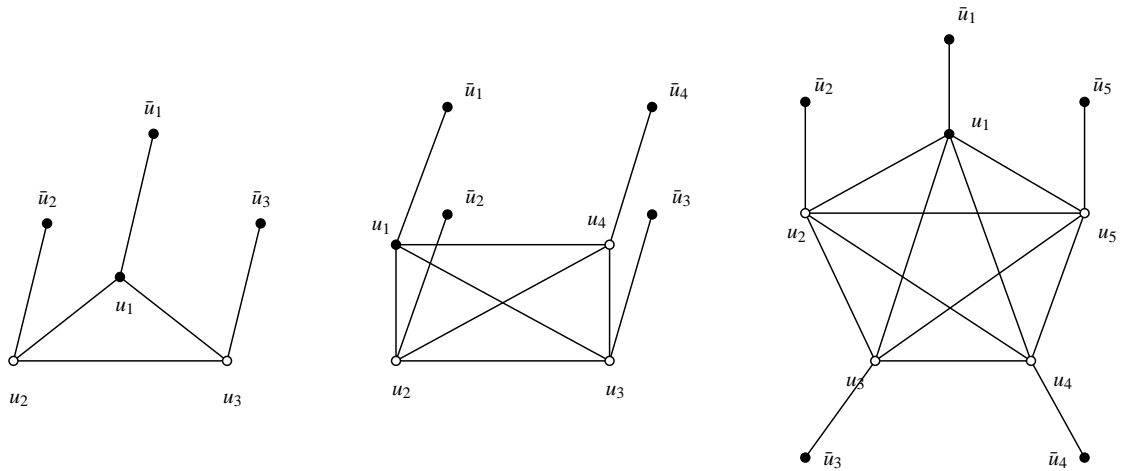


Figura 4.1: Número P_3 para $K_3\bar{K}_3$, $K_4\bar{K}_4$ e $K_5\bar{K}_5$

Teorema 4.2 Considere um caminho P_n e seja $G = P_n \bar{P}_n$. Então $n_{P_3}(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$, para $n \geq 4$.

Prova. Considere $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{P}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = P_n \bar{P}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(P_n) \cup V(\bar{P}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(P_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{P}_n)$.

Para $n = 4$, seja $S = \{u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_4\}$, note que $I_{P_3}[S] = V(G)$. Logo $g_n(P_4 \bar{P}_4) = 4$, que também satisfaz o limite $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Seja $n > 4$. Primeiramente vamos mostrar que $n_{P_3}(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Se $S \subseteq \bar{P}_n$, então $I_{P_3}[S] \subseteq \bar{P}_n$. Logo, S deve conter vértices de P_n . Como $\text{exc}(G) = 3$ e para que $|S|$ tenha quantidade mínima de vértices, S deve conter a menor quantidade de vértices de P_n que distam no máximo 2, já que a convexidade é P_3 . A escolha dos vértices de P_n que satisfaçam a afirmação acima é tal que todos estes vértices devem possuir distância no máximo 2 tanto de P_n quanto de \bar{P}_n e que $u_2 \in S$. Se $u_2 \in S$, logo $u_1 \notin S$, portanto restam $n - 1$ vértices que podem pertencer a S , incluindo u_2 . Assim, no máximo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ vértices de P_n devem estar em S . Para os vértices de \bar{P}_n , basta que apenas dois vértices estejam em S . Como $u_2 \in S$ e $u_1 \notin S$, logo $\bar{u}_1 \in S$, já que $d(u_2, \bar{u}_1) = 2$. O segundo vértice de \bar{P}_n deve respeitar a regra de que se n for par, então $\{u_n, \bar{u}_{n-1}\} \in S$, se n for ímpar, então $\{u_{n-1}, \bar{u}_n\} \in S$. Logo $n_{P_3}(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Vamos definir recursivamente um conjunto S' . Primeiramente, $\{u_2, \bar{u}_1\} \in S'$. Seja $4 < i \leq n$. Se n é par, então $u_i \in S'$, se $u_{i-2} \in S'$ e $d(u_i, u_{i-2}) = 2$ e $\bar{u}_{n-1} \in S'$. Se n é ímpar, então $u_i \in S'$, se $u_{i-2} \in S'$ e $d(u_i, u_{i-2}) = 2$ e $\bar{u}_n \in S'$. Observe que $|S'| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$. Vamos mostrar que $I_{p_3}[S] = V(G)$.

Note que $I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}] = \bar{P}_n \setminus \{\bar{u}_2, \bar{u}_n\}$ se n é par. Se n é ímpar, então $I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_n] = \bar{P}_n \setminus \{\bar{u}_2, \bar{u}_{n-1}\}$. Mas $\bar{u}_2 \in I_{p_3}[u_2, \bar{u}_{n-1}]$ e $\bar{u}_n \in I_{p_3}[u_n, u_1]$ e $\{u_2, u_n\} \subset S'$ se n é par e $\bar{u}_2 \in I_{p_3}[u_2, \bar{u}_n]$ e $\bar{u}_{n-1} \in I_{p_3}[u_{n-1}, \bar{u}_1]$ e $\{u_2, u_{n-1}\} \subset S'$ se n é ímpar.

Assim, $I_{p_3}[S'] \cup I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_{n-1}] = V(G)$ se n é par e $I_{p_3}[S'] \cup I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_n] = V(G)$ se n é ímpar, ou seja, $n_{p_3}(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$.

□

É fácil verificar que para $n = 2$, temos que $n_{p_3}(G) = 3$ e para $n = 3$, temos $n_{p_3}(G) = 4$, como pode ser visto na Figura 4.2.

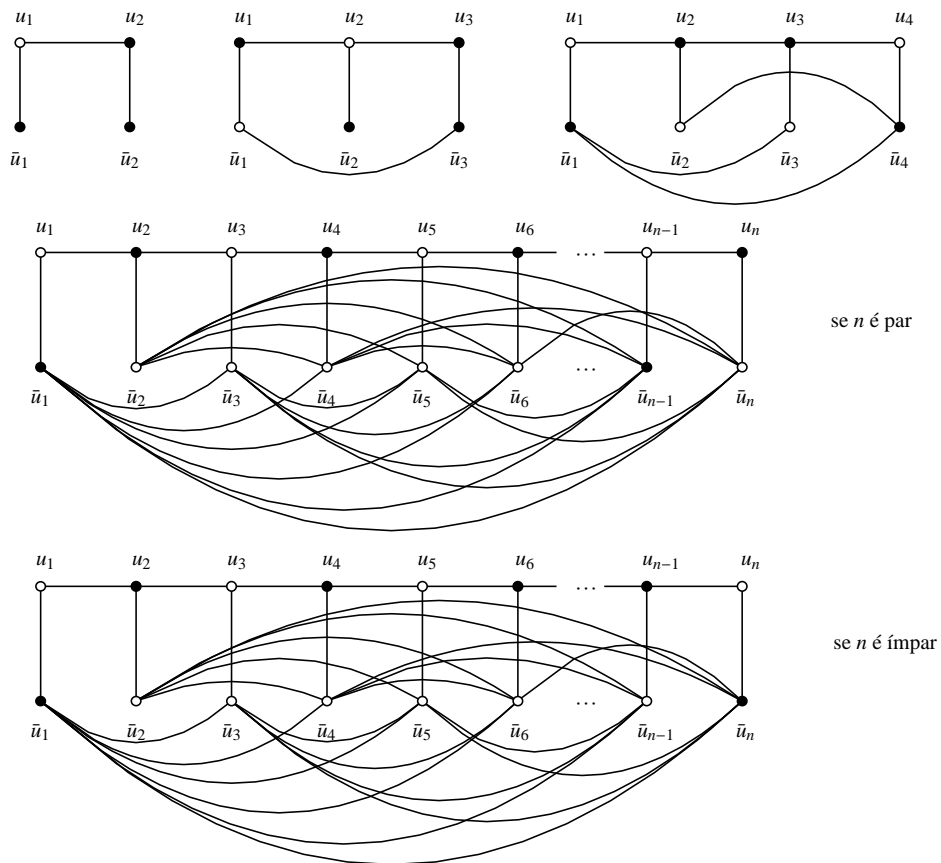


Figura 4.2: Número P_3 para prismas complementares $P_n \bar{P}_n$, com $n \geq 2$.

O próximo teorema mostra o número P_3 para prismas complementares de ciclos C_n . Neste caso, consideramos $n \geq 4$, já que para $n = 3$ temos que $C_3 \bar{C}_3 = K_3 \bar{K}_3$, o qual já

foi provado no Teorema 4.1.

Teorema 4.3 *Considere um ciclo C_n com $n \geq 4$ e seja $G = C_n\bar{C}_n$. Então $n_{p_3}(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.*

Prova.

Considere $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{C}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = C_n\bar{C}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(C_n) \cup V(\bar{C}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(C_n) \cup \{u_1\bar{u}_1, \dots, u_n\bar{u}_n\} \cup E(\bar{C}_n)$.

Seja $n \geq 4$ e $G = C_n\bar{C}_n$. Seja $S = \{u_i, u_j\}$, tal que $u_i, u_j \in C_n$. Se $d(u_i, u_j) = 2$, então $I_{p_3}[S] = \{u_i, x, u_j\}$, tal que $x \in C_n$ e x está sobre um caminho P_3 de u_i a u_j . Senão $I_{p_3}[S] = \{u_i, u_j\}$.

Da mesma forma, seja $S = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$, onde $\bar{u}_i, \bar{u}_j \in \bar{C}_n$. Observe que $I_{p_3}[S] = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$ ou $I_{p_3}[S] \subset \bar{C}_n$.

Seja $S = \{u_i, \bar{u}_j\}$. Se $d(u_i, \bar{u}_j) = 2$, temos que $I_{p_3}[S] = \{u_i, x, \bar{u}_j\}$, onde x pertence ao caminho P_3 de u_i a \bar{u}_j . Senão $I_{p_3}[S] = \{u_i, \bar{u}_j\}$ e assim $n_{p_3}(G) > 2$.

Seja $S = \{u_i, u_j, u_w\}$, ou $S = \{u_i, u_j, \bar{u}_w\}$, ou $S = \{u_i, \bar{u}_j, \bar{u}_w\}$, ou $S = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_w\}$, temos que $I_{p_3}[S] \subset C_n \cup \bar{C}_n$. Portanto, $n_{p_3}(G) > 3$.

Para $n = 4$, seja $S = \{u_4, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. Note que $I_{p_3}[S] = V(G)$. Como $g_n(G) > 3$, logo $g_n(C_4\bar{C}_4) = 4$, que também satisfaz o limite $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Seja $n > 4$. Primeiramente vamos mostrar que $n_{p_3}(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Se $S \subseteq \bar{C}_n$, então $I_{p_3}[S] \subseteq \bar{C}_n$. Logo, S deve conter vértices de C_n . Como $exc(G) = 3$ e para que $|S|$ tenha quantidade mínima de vértices, S deve conter a menor quantidade de vértices de C_n que distam no máximo 2, já que a convexidade é P_3 . A escolha dos vértices de C_n que satisfaçam a afirmação acima é tal que todos estes vértices devem possuir distância no máximo 2 tanto de C_n quanto de \bar{C}_n e que $\{\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}\} \subset S$. Se $\{\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}\} \subset S$, logo $\{u_{i+2}, u_n\} \subset S$. Assim, no máximo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ vértices de C_n devem estar em S , desde que $\{u_{i+2}, u_n\} \subset S$. Como somente um vértice em $\bar{C}_n \in S$ não satisfaz $I[S] = V(G)$, logo são necessários no mínimo mais dois vértices de \bar{C}_n em S , no caso $\{\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}\}$. Portanto, $n_{p_3}(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

Vamos definir recursivamente um conjunto S' . Primeiramente, $\{u_3, u_n\} \subset S'$. O vértice $u_i \in S'$, se $u_{i-2} \in S'$ e $d(u_i, u_{i-2}) = 2$, para $5 \leq i < n$. Faça $S = S' \cup \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. Observe que $|S'| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, então $|S| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$. Vamos mostrar que $I[S] = V(G)$.

Note que $I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_2] = \bar{C}_n \setminus \{\bar{u}_3, \bar{u}_n\}$. Mas $\bar{u}_3 \in I[u_3, \bar{u}_1]$ e $\bar{u}_n \in I[u_n, \bar{u}_2]$ e $\{u_3, u_n\} \subseteq S'$.

Assim, $I_{p_3}[S'] \cup I_{p_3}[\bar{u}_1, \bar{u}_2] = V(G)$, ou seja, $n_{p_3}(G) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$.

□

A Figura 4.3 ilustra alguns exemplos relacionados ao Teorema 4.3.

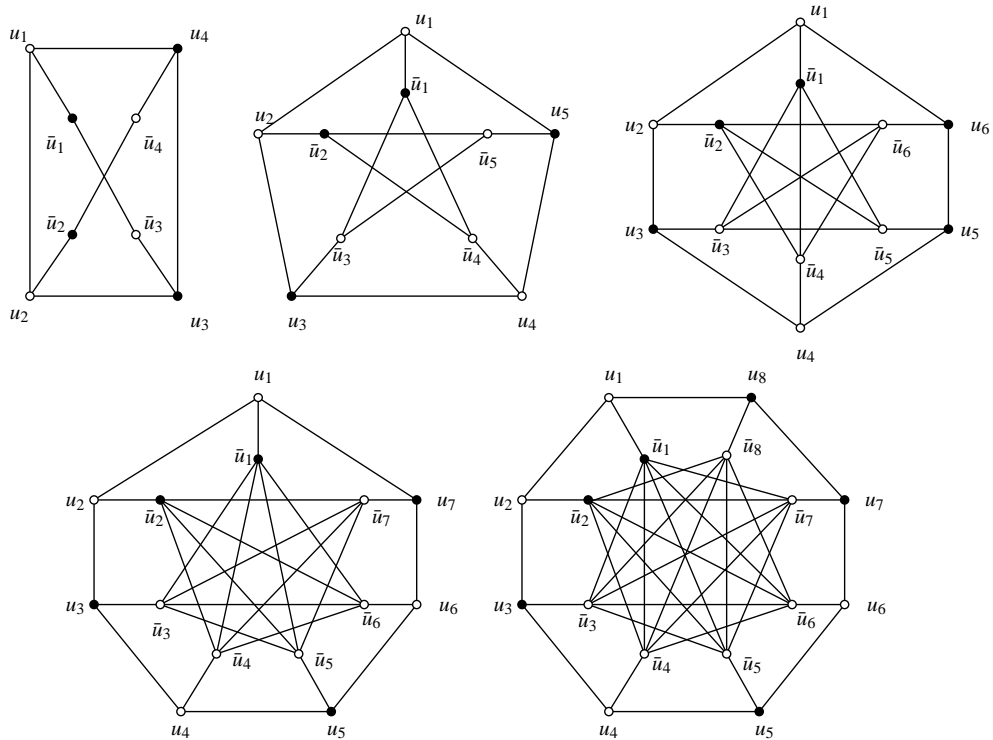


Figura 4.3: Número P_3 para prismas complementares $C_n \bar{C}_n$, com $n \geq 4$

Na seção seguinte, discutiremos o tópico envoltória convexa P_3 aplicada aos prismas complementares.

4.2 Número envoltório P_3

No tópico anterior, aplicamos a operação intervalo em S uma única vez para descobirmos se um conjunto S é um conjunto P_3 . Se esta resultar em todos os vértices de G , então S é um conjunto P_3 .

Considere agora aplicar a operação intervalo P_3 sucessivas vezes, $I_{P_3}^*[S]$, até quando não for possível adicionarmos mais vértices ao conjunto S . Assim, o que antes era considerado conjunto P_3 agora passa a ser o *conjunto envoltório* P_3 .

Dessa forma, o conjunto *envoltório* P_3 , aqui representado por $H_G(S)$, decorre de S por iteratividade adicionando vértices que tenha pelo menos dois vizinhos no conjunto corrente. O conjunto S é um conjunto *envoltório* P_3 de G se $H_G(S) = V(G)$. O *número envoltório* P_3 , $h_{P_3}(G)$ de G , é a cardinalidade mínima de um conjunto envoltório P_3 de G .

Para exemplificar, considere o grafo $G\bar{G}$ da Figura 2.4. Um possível conjunto envoltório P_3 mínimo seria $S = \{a, c, \bar{f}\}$, resultando em $h_{P_3}(G\bar{G}) = 3$.

Sabemos que todo conjunto P_3 é um conjunto envoltório P_3 , mas o problema que precisamos resolver, envolve o conjunto envoltório P_3 de cardinalidade mínima.

Enquanto o cálculo do número envoltório P_3 é NP-completo, [17], nosso próximo resultado implica que o número envoltório P_3 para prismas complementares pode ser determinado de forma eficiente.

Teorema 4.4 [38] *Seja G um grafo.*

1. Se G tem k componentes com $k \geq 2$, então $h_{P_3}(G\bar{G}) = k + 1$.
2. Se G e \bar{G} são conexos, então $h_{P_3}(G\bar{G}) \leq 5$.

Prova: (i) Uma vez que para cada conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$ intersepta cada componente de G e de \bar{G} , temos $h_{P_3}(G\bar{G}) \geq k + 1$. Sejam $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$ denotar as ordens das k componentes G_1, G_2, \dots, G_k de G .

Se $k \geq 3$ e S é o conjunto de vértices que contém um vértice de cada componente de G e um vértice de \bar{G} , então, uma vez que \bar{G} contém um grafo k -partido completo como um subgrafo, S é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) = k + 1$. Seja $k = 2$. Se $n_2 = 1$, então $G\bar{G}$ é um caminho de ordem 4 e assim $h_{P_3}(G\bar{G}) = 3$. Agora seja $n_2 \geq 2$. Se $n_1 \geq 2$ e x, y , e z três vértices distintos de G , então $H_{G\bar{G}}(\{x, y, \bar{z}\})$ contém \bar{x}, \bar{y} , todos de $V(\bar{G})$, e portanto, é um conjunto envoltório P_3 , o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) = k + 1$. Para $n_1 = 1$ e seja x ser o único vértice de G_1 . Se \bar{G}_2 é conexo, então um conjunto que contém x, \bar{x} , e um vértice de G_2 é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) = 3$. Assim, podemos assumir que \bar{G}_2 não é conexo. Se \bar{G}_2 tem pelo menos 3 componentes ou se \bar{G}_2 tem exatamente duas componentes cada uma de ordem pelo menos 2, então para vértices \bar{y} e \bar{z} em componentes distintas de \bar{G}_2 , o conjunto $H_G(\{x, y, \bar{z}\})$ contém \bar{x}, z , todos de $V(G_2)$, e assim é um conjunto envoltório P_3 , o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) = 3$. Agora seja \bar{G}_2 ter exatamente duas componentes sendo que uma destas é um vértice isolado \bar{y} . Um conjunto que contém x, y , e um vértice de $V(\bar{G}) \setminus \{\bar{x}, \bar{y}\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) = 3$. Isto completa a prova de (i).

(ii) Sejam a, b , e c três vértices de G . Sejam $V_1 = H_G(\{a, b, c\})$ e $V_2 = V(G) \setminus V_1$. Se $|V_2| \leq 1$, então a união de $\{a, b, c\} \cup V_2$ com \bar{a} é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) \leq 5$. Assim podemos assumir que $|V_2| \geq 2$. Note que todos vértices em \bar{V}_2 são adjacente a no máximo um vértice em \bar{V}_1 . Seja \bar{d} um vértice em \bar{V}_2 . Seja $S = \{a, b, c, \bar{d}\}$. Como \bar{d} tem pelo menos dois vizinhos em $\{a, b, c\}$, o envoltório P_3 $H_{G\bar{G}}(S)$ de S contém dois vértices de $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ e assim $V_1 \cup \bar{V}_2$. Se $H_{G\bar{G}}(S)$ não contém \bar{V}_1 , então nenhum vértice em $\bar{V}_1 \setminus H_{G\bar{G}}(S)$ é adjacente a um vértice em \bar{V}_2 . Como \bar{G} seja conexo, algum vértice \bar{x} em $\bar{V}_1 \setminus H_{G\bar{G}}(S)$ é adjacente a um \bar{y} em $\bar{V}_1 \cap H_{G\bar{G}}(S)$. Como $x \in V_1 \subseteq H_{G\bar{G}}(S)$, isto implica uma contradição. Isto implica que $H_{G\bar{G}}(S)$ contém \bar{V}_1 . Agora, uma vez que G é conexo, S é um conjunto envoltório P_3 , o que implica $h_{P_3}(G\bar{G}) \leq 4$ e completa a prova. \square

As Figuras 4.4, 4.5 e 4.6 exemplificam as provas dos itens (i) e (ii) do Teorema 4.4.

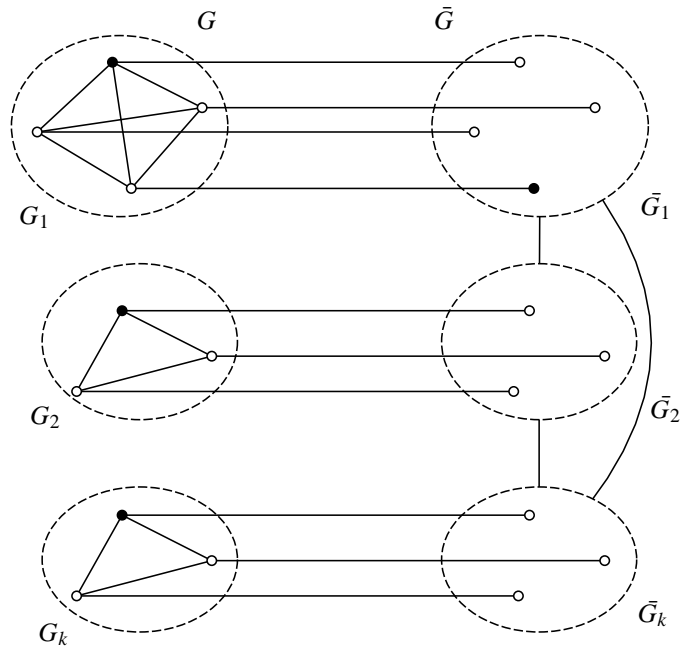


Figura 4.4: (i) G tem k componentes com $k \geq 2$, então $h_{p_3}(G\bar{G}) = k + 1$

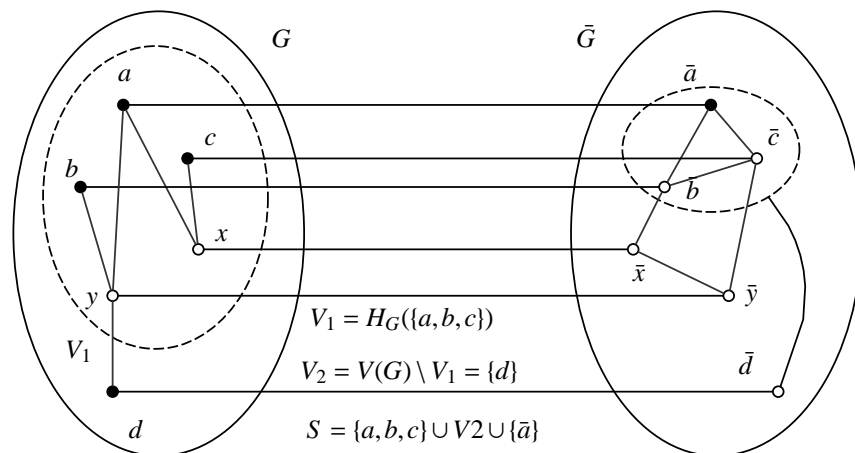


Figura 4.5: (ii) Se $|V_2| \leq 1$ - G e \bar{G} são conexos, então $h_{p_3}(G\bar{G}) \leq 5$

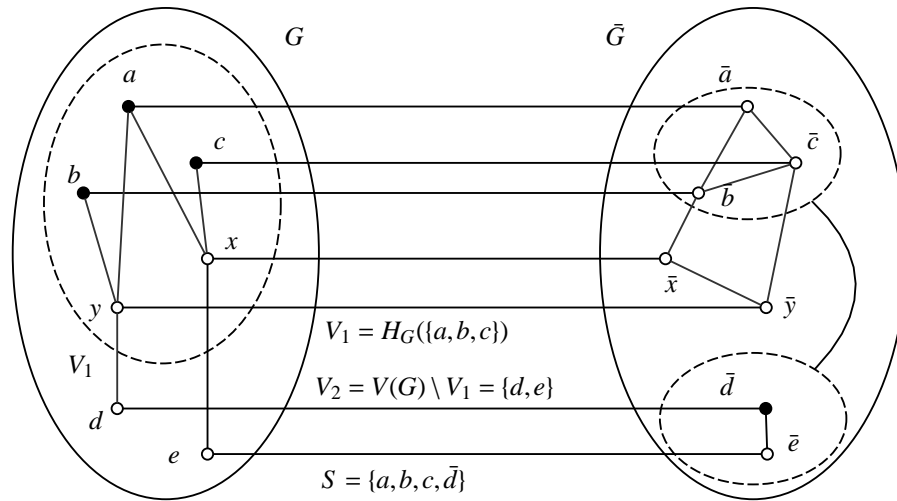


Figura 4.6: (ii) Se $|V_2| \geq 2$ - G e \bar{G} são conexos, então $h_{P_3}(G\bar{G}) \leq 5$

E para a maioria das árvores, a estimativa no Teorema 4.4 (ii) ainda pode ser melhorada.

Proposição 4.5 [38] Se T é uma árvore com pelo menos três folhas que não seja uma estrela ou derive de uma estrela por subdivisão de uma aresta, então $h(T\bar{T}) = 2$.

Prova: Se para qualquer vértice u de T que não é uma folha, existe pelo menos duas folhas de T que não são adjacentes a u , então $\{x, \bar{y}\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $T\bar{T}$ onde x e y são folhas distintas de T . Assim, podemos supor que algum vértice u^* de T é adjacente a todos, mas no máximo a uma folha de T . Isto implica que T surge a partir de uma estrela com pelo menos três folhas por subdivisão de uma aresta u^*v pelo menos duas vezes, onde v é uma folha de T . Se w é outra folha de T e v' é o vizinho de v em T , então $H_{T\bar{T}}(\{v, \bar{w}\})$ contém todos vértices \bar{x} , onde x é uma folha de T , v' , u^* , todos vértices de $V(\bar{T})$, e assim $\{v, \bar{w}\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $T\bar{T}$, o que completa a prova. \square

Como uma consequência do Teorema 4.4 seguem os Corolários 4.7, 4.8 e 4.9 a cerca dos prismas complementares de grafos P_n , C_n e K_n . O próximo Lema é um resultado demonstrado em [43] e que também será utilizado nas provas dos corolários envolvendo o número envoltório P_3 .

Lema 4.6 [43] Para qualquer conjunto envoltório S de um grafo G , S contém todos vértices simpliciais de G .

Corolário 4.7 Se G é um grafo completo K_n , então $h_{P_3}(K_n\bar{K}_n) = n + 1$.

Prova. Considere $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{K}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = K_n\bar{K}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(K_n) \cup \{u_i, \bar{u}_i\} \cup E(\bar{K}_n)$.

Com base no Lema 4.6, temos que cada vértice simplicial de G deve pertencer ao conjunto envoltório de H , mas $H[V(\bar{K}_n)] \neq V(G)$. Para que $H[S] = V(G)$ é necessário a inclusão de um vértice $u_i \in K_n$. Sem perda de generalidade, seja $S = \{V(\bar{K}_n)\} \cup \{u_1\}$. Observe que $\{u_i u_1, u_i \bar{u}_i\} \subseteq E(G)$, para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, então $I[S] = H[S] = V(G)$. Como $|S| = n + 1$, logo $h_{p_3}(K_n \bar{K}_n) = n + 1$.

□

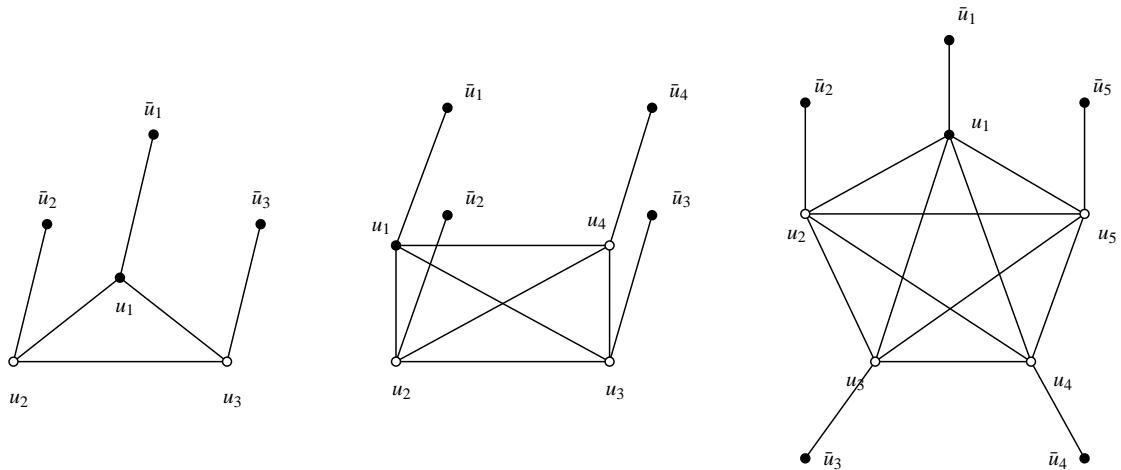


Figura 4.7: Número envoltório P_3 para $K_3 \bar{K}_3$, $K_4 \bar{K}_4$ e $K_5 \bar{K}_5$

O próximo Corolário mostra o número envoltório P_3 para prismas complementares de ciclos C_n . Nesse caso, consideramos $n \geq 4$ já que para $n = 3$ temos que $C_3 \bar{C}_3 = K_3 \bar{K}_3$, o qual já foi provado as operações prisma complementar para grafos completos por meio do Corolário 4.7.

Corolário 4.8 Considere o ciclo C_n e $G = C_n \bar{C}_n$, então

$$h_{p_3}(G) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } n \geq 7 \\ 3 & , \text{ se } 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

Prova. Considere $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{C}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = C_n \bar{C}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(C_n) \cup V(\bar{C}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(C_n) \cup \{u_i, \bar{u}_i\} \cup E(\bar{C}_n)$, para $i = 1, \dots, n$.

Se $u_i, u_j \in C_n$, então $H[\{u_i, u_j\}] \subseteq C_n$. Por outro lado, se $\bar{u}_i, \bar{u}_j \in \bar{C}_n$, então $H[\{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}] \subseteq \bar{C}_n$. Sejam $u_i \in C_n$ e $\bar{u}_j \in \bar{C}_n$. Se u_i e \bar{u}_j são adjacentes então $H[\{u_i, \bar{u}_j\}] = \{u_i, \bar{u}_j\}$. Então considere $u_i \in C_n$ e $\bar{u}_j \in \bar{C}_n$ tal que $d(u_i, \bar{u}_j) = 2$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $n \geq 7$. Observe que, $I[\{u_i, \bar{u}_j\}] = \{u_i, \bar{u}_j, \bar{u}_i\}$ e $H[\{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}] = \bar{C}_n$. Logo $I^3[u_i, \bar{u}_j] = \bar{C}_n \cup \{u_i\}$. Note que, todo $u_k \in C_n$, está sobre o caminho de $u_{k-1}-\bar{u}_k$, logo u_k pertence a $I^\alpha[u_i, \bar{u}_j]$, onde $3 \leq \alpha \leq n$. Portanto $H[u_i, \bar{u}_j] = V(G)$ e $h_{P_3}(G) = 2$.

Caso 2: $4 \leq n \leq 6$. Neste caso, $H[\{u_i, \bar{u}_j\}] = \{u_i, \bar{u}_j, x\}$, onde $x \in C_n$ ou $x \in \bar{C}_n$. Logo $h_{P_3} > 2$. A Figura 4.9 exibe conjuntos envoltórios para os grafos $C_n\bar{C}_n$ mostrando que $h_{P_3}(C_n\bar{C}_n) = 3$, para $4 \leq n \leq 6$.

□

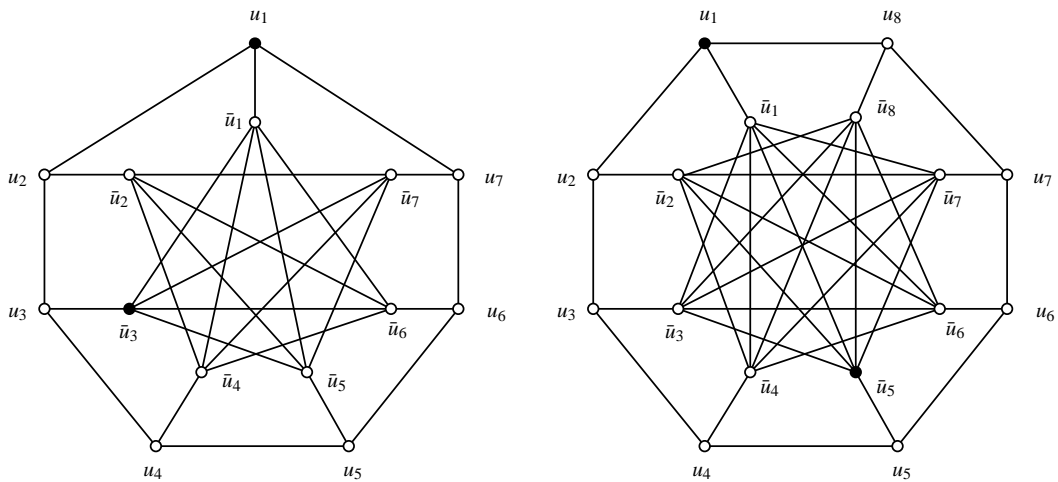


Figura 4.8: Número envoltório P_3 para $C_n\bar{C}_n$, com $n = 7$ e $n = 8$.

Para $n = 4, 5$ e 6 , $h_{P_3}(G) = 3$, conforme pode ser visto na Figura 4.9.

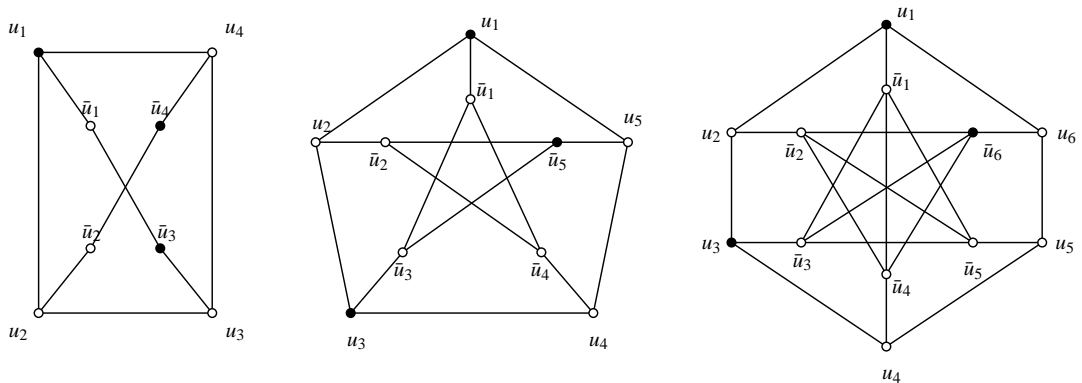


Figura 4.9: Número envoltório P_3 para $C_n\bar{C}_n$, com $4 \leq n \leq 6$

Corolário 4.9 *Seja um caminho P_n e $G = P_n\bar{P}_n$, então*

$$h_{P_3}(G) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } n \geq 6 \\ 3 & , \text{ se } 2 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

Prova. Prova segue os padrões do Corolário 4.8. □

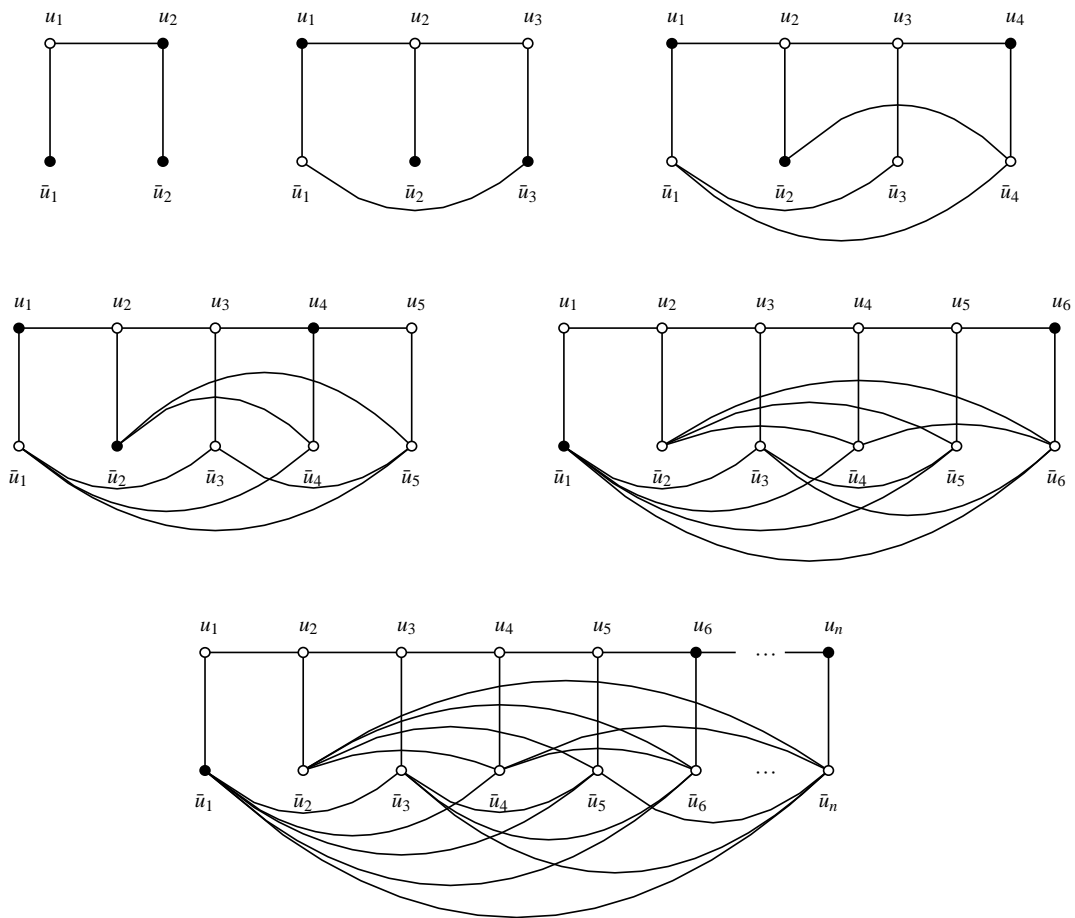


Figura 4.10: Número envoltório P_3 para $P_n \bar{P}_n$

Vimos nesta última seção que o número envoltório P_3 para prismas complementares pode ser determinado em tempo polinomial e o resultado de $k + 1$ pode ser facilmente visto para cografos.

Na seção seguinte, abordaremos sobre teorema de Carathéodory e o número de Carathéodory utilizando a convexidade P_3 . Trabalhamos este problema para os prismas complementares das classes de grafos bipartidos, cografos, árvores, caminhos, completos e ciclos.

4.3 Número de Carathéodory

Um resultado bem conhecido sobre conjuntos convexos no R_d é o teorema de Carathéodory [13, 41]. Esse teorema afirma que todo ponto u no fecho convexo de um conjunto $S \subseteq R_d$ encontra-se no fecho convexo de um subconjunto F de S de ordem no máximo $d + 1$. O fecho convexo $H_G(S)$ de S é o menor conjunto convexo contendo S .

Um conjunto S de vértices de um grafo G é um *conjunto de Carathéodory* de C se o conjunto $\partial HC(S)$ definido como $H(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H(S \setminus \{u\})$ não é vazio. Esta definição permite uma definição alternativa para o número de Carathéodory de C como sendo a cardinalidade máxima entre os conjuntos de Carathéodory de C .

Considere o grafo G e C uma convexidade sobre $V(G)$. O *número de Carathéodory* $c(G)$ de C é o menor inteiro c tal que, para todo conjunto S de vértices de G e todo vértice u em $H(S)$, existe um conjunto $F \subseteq S$ com $|F| \leq c$ e $u \in HC(F)$.

Considere C a convexidade P_3 e observe o grafo $G\bar{G}$ da Figura 2.4. Tomemos $S = \{a, \bar{b}, \bar{c}\}$ um subconjunto de $V(G\bar{G})$ e note que $H(S) = V(G\bar{G})$. Considere o vértice c , e veja que $c \in H_C(S)$, mas $c \notin S$. Se tomarmos $F \subseteq S$ sempre de tamanho 2, o vértice c nunca pertencerá ao fecho convexo de F . Assim, observe que $c \notin H(S \setminus \{v\})$, onde $v \in S$. Logo S é um conjunto de Carathéodory e $c(G\bar{G}) = 3$.

O número de Carathéodory já foi determinado para algumas classes de convexidades e de grafos. Para a convexidade monofônica o número de Carathéodory foi completamente determinado, como segue: $c(G) = 1$, se G é um grafo completo, e $c(G) = 2$ caso contrário. Considerando a convexidade de caminhos de triângulos, $c(G) = 2$ sempre que G tem pelo menos uma aresta. Quanto a convexidade P_3 para grafos direcionados, foi provado que o número de Carathéodory para torneios multipartidos é no máximo 3 [27].

Para um conjunto S de vértices de um grafo G , seja $\partial H_G(S) = H_G(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H_G(S \setminus \{u\})$. O conjunto S é um *conjunto de Carathéodory* de G , se $\partial H_G(S) \neq \emptyset$ e o *número de Carathéodory* de G é a cardinalidade máxima de um conjunto de Carathéodory de G .

Barbosa et al. [3] mostraram que o cálculo do número de Carathéodory é NP-completo. A sua construção também pode ser usada para estabelecer a dificuldade para prismas complementares.

Teorema 4.10 [38] *é NP-completo decidir para um determinado par (G, k) , onde G é um grafo bipartido e k é um inteiro, se $G\bar{G}$ tem um conjunto de Carathéodory de ordem k .*

Prova: O problema de decisão considerado está claramente em NP. Para uma determinada instância 3Sat \mathcal{I} , com m cláusulas em n variáveis, Barbosa et al. [3] constroem um grafo G , cuja ordem é polinomialmente limitada em termos de n e m , de tal forma que

I é satisfazível, se e somente se, G tem um conjunto de Carathéodory de ordem m . O grafo construído G é conexo e tem a propriedade de que a cada dois de seus vértices formam um conjunto envoltório P_3 de seu complemento \bar{G} , que também é conexo. Além disso, G tem dois vértices especiais, a e b , tal que $N_G(a) = N_G(b)$, todos vértices em $V(G) \setminus \{a, b\}$ tem grau no máximo 13, e cada dois vizinhos de a e b formam um conjunto envoltório P_3 de G .

Com a finalidade de completar a prova de que é suficiente mostrar que para $m \geq 15$, o grafo G tem um conjunto de Carathéodory de ordem m , se e somente se, o seu prisma complementar $G\bar{G}$ tem um conjunto de Carathéodory de ordem m . Uma vez que em $G\bar{G}$ cada vértice em $V(\bar{G})$ tem exatamente um vizinho em $V(G)$, cada conjunto de Carathéodory de G também é um conjunto de Carathéodory de $G\bar{G}$. Por outro lado, assumimos que C é um conjunto de Carathéodory de $G\bar{G}$ de ordem m . Desde que cada dois vértices de \bar{G} formam um conjunto envoltório P_3 de \bar{G} , o conjunto C contém no máximo dois vértices em $V(\bar{G})$. Desde que dois vértices em $V(\bar{G})$ juntamente com qualquer vértice em $V(G)$ formam um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, a suposição $m > 3$ implica que C contém no máximo um vértice em $V(\bar{G})$. Se S não contém qualquer vértice em $V(\bar{G})$, então S é um conjunto de Carathéodory de G .

Dessa forma, podemos assumir que S contém um único vértice $\bar{x} \in V(\bar{G})$. Se $x \notin \{a, b\}$, então \bar{x} tem no máximo 13 vértices não adjacentes em $V(\bar{G})$. Desde que $m \geq 15$, isto implica que $S \cap V(G)$ contém um vértice y tal que \bar{y} é um vizinho de \bar{x} . Agora $\{\bar{x}, y\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que é uma contradição. Por simetria, podemos assumir que $x = a$. Se S contém dois vizinhos, digamos y e z , de a em $V(G)$, então $\{x, y, \bar{a}\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que é uma contradição. Assim, S contém no máximo um vizinho de a em $V(G)$. Desde que $m \geq 15$, segue-se que S contém um vértice u em $V(G)$ tal que \bar{u} é um vizinho de \bar{a} . Agora $\{\bar{a}, u\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que é uma contradição e isso completa a prova. \square

Em vista do Teorema 4.10, é de interesse estudar grafos para que o número de Carathéodory de seus primas complementares possam ser determinados em tempo polinomial. A observação chave na prova do Teorema 4.10 foi que para m suficientemente grande, o número de Carathéodory de G e $G\bar{G}$ são o mesmo, já que cada conjunto de Carathéodory de $G\bar{G}$ deve estar completamente contido em $V(G)$. O seguinte resultado explora a mesma observação.

Proposição 4.11 [38] *Se G é um grafo conexo de ordem n e grau máximo Δ com $n \geq 3\Delta + 2$ e k um inteiro com $k \geq \Delta + 3$, então G tem um conjunto de Carathéodory de ordem k se e somente se $G\bar{G}$ tem um conjunto de Carathéodory de ordem k .*

Prova: Como na prova do Teorema 4.10, segue-se imediatamente que $G\bar{G}$ tem um conjunto de Carathéodory de ordem k se G tem um conjunto de Carathéodory de

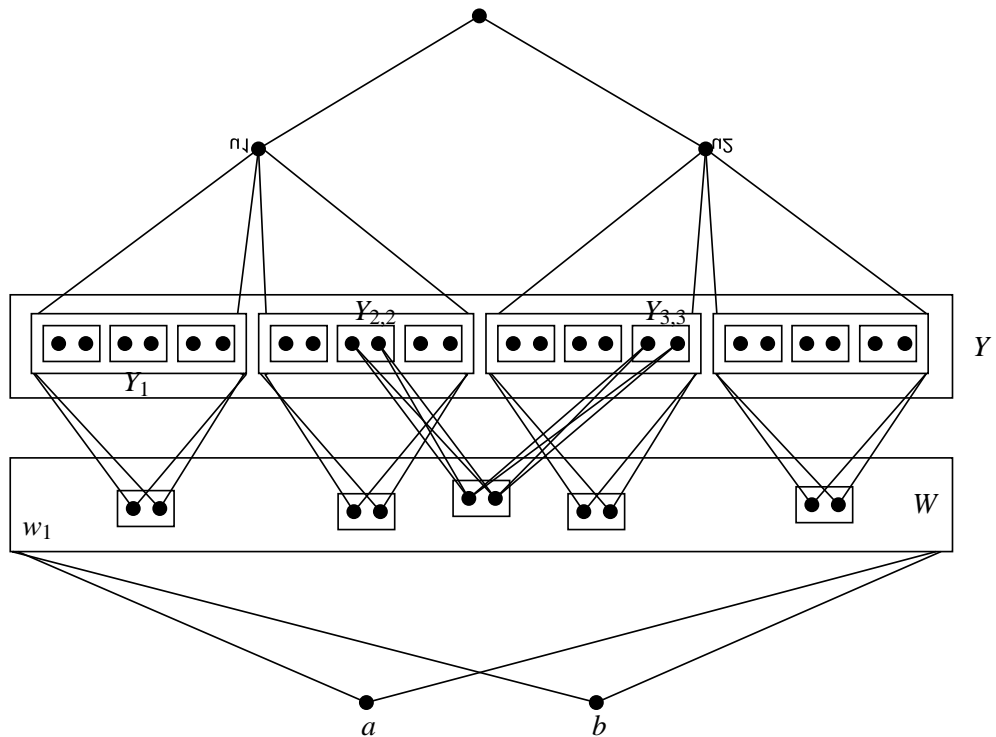


Figura 4.11: Grafo Bipartido G obtido pela construção de uma instância de 3-SAT. Note que nem todos vértices são mostrados [3].

ordem k . Agora, seja C um conjunto de Carathéodory de $G\bar{G}$ de ordem k . Se u e v são dois vértices de G , então $H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}, \bar{v}\})$ contém \bar{u} , \bar{v} , e todos vértices que são adjacentes em \bar{G} para ambos \bar{u} e \bar{v} . Uma vez que estes são pelo menos $n - 2\Delta$ vértices e $n - 2\Delta \geq \Delta + 2$, segue-se que cada dois vértices de \bar{G} formam um conjunto envoltório P_3 de \bar{G} . Isto implica que C contém no máximo dois vértices em $V(\bar{G})$. Como na prova do Teorema 4.10, podemos supor que C contém um vértice $\bar{u} \in V(\bar{G})$. Desde que $k \geq \Delta + 3$, o conjunto C contém um vértice v em $V(G)$ tal que \bar{v} é um vizinho de \bar{u} em \bar{G} . Desde que $\{\bar{u}, v\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, obtemos a contradição $|C| = 2$, o que completa a prova. \square

Uma árvore enraizada na qual cada vértice que não é uma folha, tem exatamente dois filhos é chamada uma *árvore estritamente binária*. Barbosa et al. [3] mostraram que o número de Carathéodory de uma árvore T é o número máximo de folhas de uma subárvore estritamente binária de T , o que leva a um eficiente algoritmo computacional do número de Carathéodory de árvores. A seguir, mostramos que o cálculo do número de Carathéodory do prisma complementar $T\bar{T}$ pode ser obtido em tempo polinomial.

Proposição 4.12 [38] *Dada uma árvore T , o número de Carathéodory de $T\bar{T}$ pode ser determinado em tempo polinomial.*

Proof: Seja T uma árvore de ordem n e grau máximo Δ . Seja C um conjunto de Carathéodory de $T\bar{T}$. Claramente, podemos assumir que C contém pelo menos dois elementos, o que implica que $\partial H_{T\bar{T}}(C)$ e C não fazem interseção.

Se T é uma estrela com centro em u^* , então \bar{T} é a união de duas cliques, o que implica que C contém no máximo 3 vértices em $V(\bar{T})$. Se C contém pelo menos 3 vizinhos de u^* em $V(T)$, digamos u_1, u_2 , e u_3 , então, uma vez que C é um conjunto de Carathéodory de $T\bar{T}$, obtemos que $u^*, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \in H_{T\bar{T}}(C)$. Desde que \bar{u}_1, \bar{u}_2 , e \bar{u}_3 formam uma clique em \bar{T} , obtemos a contradição que $H_{T\bar{T}}(C) = H_{T\bar{T}}(C \setminus \{u_i\})$ para algum i , o que implica que C contém no máximo 5 vértices. Neste caso o número de Carathéodory de $T\bar{T}$ pode ser trivialmente determinado de forma eficiente. Se T tem diâmetro 3, ou seja, T é uma *estrela-dupla*, então muitos argumentos similares implicam que C tem ordem limitada e assim também neste caso o número de Carathéodory de $T\bar{T}$ pode ser determinado de forma eficiente. Assim, podemos assumir que T tem diâmetro pelo menos 4. Se T é um caminho, então facilmente se verifica que $c(T\bar{T}) \leq 3$. Logo, podemos assumir que $\Delta \geq 3$. Segue-se facilmente que cada dois vértices de \bar{T} são um conjunto envoltório P_3 de \bar{T} . Portanto C contém no máximo dois vértices em $V(\bar{T})$. Uma vez que dois vértices em $V(\bar{T})$ em conjunto com um vértice em $V(T)$ formam um conjunto envoltório P_3 de $T\bar{T}$, cada conjunto de Carathéodory de $T\bar{T}$ que contém dois vértices em $V(\bar{T})$ tem ordem no máximo 3. Se C contém um único vértice \bar{u} em $V(\bar{T})$, então ou C contém um vértice v em $V(T)$ tal que \bar{v} é um vizinho de \bar{u} em \bar{G} ou $C \cap V(T)$ é um subconjunto de $N_T(u)$. No primeiro caso, $\{\bar{u}, v\}$ é um conjunto envoltório P_3 de $T\bar{T}$, o que implica $C = \{\bar{u}, v\}$, e no segundo caso $H_{T\bar{T}}(C) \setminus C = \{u\}$, o que também implica que $|C| = 2$. No total, cada conjunto de Carathéodory de $T\bar{T}$ que contém exatamente um vértice em $V(\bar{T})$ tem ordem no máximo 2. O maior conjunto de Carathéodory de $T\bar{T}$ que não contém nenhum vértice em $V(\bar{T})$ pode ser determinado eficientemente usando o algoritmo dado em [3]. Isso implica que o número de Carathéodory de $T\bar{T}$ pode ser determinado em tempo polinomial. \square

Teorema 4.13 *Seja um grafo completo K_n , com $n \geq 3$. Então, $c(K_n\bar{K}_n) = 2$.*

Prova. Considere $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{K}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = K_n\bar{K}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(K_n) \cup \{u_1\bar{u}_1, \dots, u_n\bar{u}_n\} \cup E(\bar{K}_n)$.

Seja S um conjunto de Carathéodory de G . Se $S \subseteq K_n$, então $H[S] = V(K_n)$. Quaisquer dois vértices de K_n , seja u_i, u_j , satisfazem $H[\{u_i, u_j\}] = V(K_n)$ e $|S| \leq 2$. Caso contrário $H[S] = S$ ou $H[S] = V(K_n) \cup (V(\bar{K}_n) \cap S)$. Seja $v \in H[S] \setminus S$, ou $v \in V(K_n)$, então $v \in H[\{u_i, \bar{u}_j\}]$, tal que $d(u_i, \bar{u}_j) = 2$ e $u_i, \bar{u}_j \in S$, ou $v \in H[\{u_i, u_j\}]$ e $u_i, u_j \in S$. Consequentemente S é o maior conjunto de Carathéodory de G . Portanto $c(G) = 2$. \square

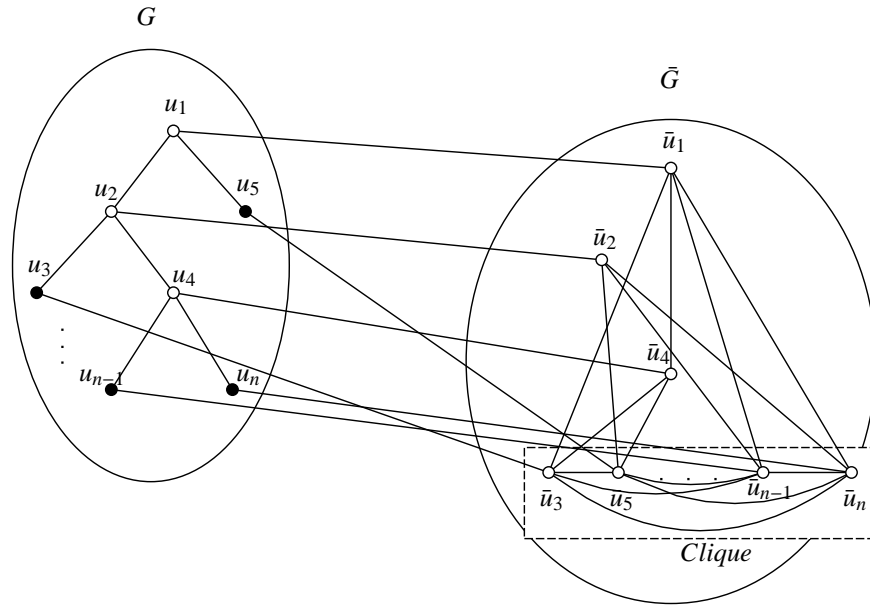


Figura 4.12: Número de Carathéodory - $G\bar{G}$ com altura $h \geq 3$.

Teorema 4.14 *Seja um ciclo C_n , com $n \geq 5$. Então, $c(C_n\bar{C}_n) = 3$.*

Prova. Considere $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{C}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = C_n\bar{C}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(C_n) \cup V(\bar{C}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(C_n) \cup \{u_1\bar{u}_1, \dots, u_n\bar{u}_n\} \cup E(\bar{C}_n)$.

Seja S um conjunto de Carathéodory de G . Primeiro, mostramos que não existe um conjunto de Carathéodory com $|S| \geq 4$. Considere os seguintes casos:

Caso 1: Seja $S = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k, \bar{u}_w\}$. Note que $H[S] = V(\bar{C}_n)$. Note que qualquer conjunto set $S' \subset S$, com $|S'| = 3$, satisfaz $H[S'] = V(\bar{C}_n)$. Assim, qualquer vértice $a \in H[S] \setminus S$, satisfaz $a \in H[S']$ e S não é um conjunto de Carathéodory.

Caso 2: Seja $S = \{u_i, u_j, u_k, u_w\}$. Note que $H[S] = S$ ou $H[S] \subseteq V(C_n)$ e todo vértice $\bar{u}_i \in V(\bar{C}_n)$ está ligado a um vértice em $V(C_n)$. Assim, todo vértice $a \in H[S] \setminus S$, satisfaz $a \in H[u, v]$, onde $u, v \in S$. Portanto S não é um conjunto de Carathéodory.

Caso 3: Seja $S = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_k, u_w\}$. Note que $H[S] = V(G)$. Note que qualquer conjunto $S' \subset S$, com $|S'| = 3$, satisfaz $H[S'] = V(\bar{C}_n)$ ou $H[S'] = V(G)$. Desta forma, todo $a \in H[S] \setminus S$, satisfaz $a \in H[S']$ e S não é um conjunto de Carathéodory.

Caso 4: Seja $S = \{u_i, u_j, u_k, \bar{u}_w\}$. Se $u_j \in H[\{u_i, u_k\}]$ e $H[\{u_j, \bar{u}_w\}] = \{u_j, \bar{u}_w\}$, então $H[S] = S$ e portanto S não é um conjunto de Carathéodory. Caso contrário $H[S] = V(G)$. Neste caso, note que existe $a \in S \setminus \bar{u}_w$, tal que $\bar{u}_w x$ e $xa \in E(G\bar{G})$ com $x \in V(\bar{C}_n)$. Logo $z \in H[S] \setminus S$, satisfaz $z \in H[\{\bar{u}_w, a\}]$ e S não é um conjunto de Carathéodory.

Caso 5: Seja $S = \{u_i, u_j, \bar{u}_k, \bar{u}_w\}$. Note que $H[S] = V(G)$. Note que qualquer conjunto $S' \subset S$, com $|S'| = 3$, satisfaz $H[S'] = S' \cup \{u_k\}$ ou $H[S'] = S' \cup \{u_w\}$ ou

$H[S'] = V(G)$. Assim, todo $a \in H[S] \setminus S$, satisfaz $a \in H[S']$ e S não é um conjunto de Carathéodory. Portanto $|S| < 4$.

Agora considere $S = \{u_i, \bar{u}_i, \bar{u}_j\}$, onde $d(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = 2$. Note que $H[S] = V(G)$. Então temos as seguintes situações:

- (1) $H[\{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}] \subseteq V(\bar{C}_n)$;
- (2) $H[\{u_i, \bar{u}_i\}] = \{u_i, \bar{u}_i\}$;
- (3) $H[\{u_i, \bar{u}_j\}] = \{u_i, u_j, \bar{u}_j\}$;

Logo, existe $a \in H[S] \setminus S$, tal que $a \notin H[\{u, v\}]$, onde $u, v \in S$. Portanto $H[S] \setminus \bigcup_{u \in S} H[S \setminus u] \neq \emptyset$ e S é um conjunto de Carathéodory. Como $|S| = 3$, logo $c(G) = 3$. \square

Teorema 4.15 *Seja um grafo caminho P_n , com $n \geq 6$. Então, $c(P_n \bar{P}_n) = 3$.*

Prova. A prova segue similar à prova do Teorema 4.14. \square

Um grafo livre de P_4 é um *cografo*. Barbosa et al. [3] mostraram que o número de Carathéodory de um cografo é no máximo 2. Em uma análise detalhada mostraremos que o número de Carathéodory do prisma complementar de um cografo é no máximo 3.

4.4 Sobre Cografos

Um grafo é um *cografo* se ele é livre de P_4 . Para todo cografo conexo G , o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos não vazios V_1 e V_2 tal que cada vértice em V_1 é adjacente a todo vértice em V_2 .

Para um grafo G , o *prisma complementar* $G\bar{G}$ de G tem um conjunto de vértices

$$V(G\bar{G}) = V(G) \cup \{\bar{u} : u \in V(G)\}$$

de ordem $2n(G)$ tal que, para $u, v \in V(G)$,

- $uv \in E(G\bar{G})$ se e somente se $uv \in E(G)$,
- $\bar{u}\bar{v} \in E(G\bar{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$, e
- $u\bar{v} \in E(G\bar{G})$ se e somente se $u = v$.

Proposição 4.16 [3] *Se G é um cografo, então $c(G) \leq 2$.*

Teorema 4.17 [38] *Se G é um cografo, então $c(G\bar{G}) \leq 3$.*

Prova. Seja G um cografo. Em vista da simétrica estrutura dos prismas complementares, podemos assumir que G é conexo. Para um conjunto U de vértices de G , denotamos o conjunto $\{\bar{u} : u \in U\}$ de vértices de $G\bar{G}$ por \bar{U} . Portanto, como referido acima, o conjunto de vértices de $G\bar{G}$ pode ser particionado em quatro conjuntos não vazios V_1, V_2, \bar{V}_1 , e \bar{V}_2 tal que

- $V(G) = V_1 \cup V_2$,
- todo vértice em V_1 é adjacente a todo vértice em V_2 ,
- $V(\bar{G}) = V(G\bar{G}) \setminus V(G) = \bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$,
- não existem arestas entre \bar{V}_1 e \bar{V}_2 , e,
- para $i \in \{1, 2\}$, existe um emparelhamento unindo os vértices de V_i e \bar{V}_i .

Seja G_i o subgrafo de G induzido por V_i e seja \bar{G}_i o subgrafo de \bar{G} induzido por \bar{V}_i para $i \in \{1, 2\}$.

Seja S um conjunto de Carathéodory de $G\bar{G}$. Seja $x \in \partial H_{G\bar{G}}(S)$. Para completar a prova, nós temos que mostrar que S tem no máximo 3 elementos. Se identificarmos um subconjunto C de S com $x \in H_{G\bar{G}}(C)$ e $|C| \leq 3$, então as escolhas de S e x implicam $S = C$ e assim $|S| \leq 3$. Claramente, podemos assumir que $x \notin S$ e que S não contém 3 vértices que formam um P_3 .

Consideramos diferentes casos e subcasos a seguir, exceto para $|V_1| = 1$ e $|V_2| = 1$, uma vez que é trivial que $G\bar{G} = P_4$.

Caso 1 $|V_1|, |V_2| \geq 2$.

Note que neste caso o conjunto envoltório de dois vértices de V_1 ou dois vértices de V_2 estão $V(G)$.

Caso 1.1 $x \in V(G)$.

Uma vez que em $G\bar{G}$ cada vértice em $V(G)$ tem exatamente um vizinho em $V(\bar{G})$, o conjunto S contém pelo menos um elemento de $V(G)$. Se S contém dois elementos u_1 e u_2 de um dos dois conjuntos V_1 e V_2 , então $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, u_2\})$. Por isso podemos assumir que S contém pelo menos um vértice de cada um dos dois conjuntos V_1 e V_2 .

Se S contém exatamente um vértice u_1 em V_1 e exatamente um vértice u_2 em V_2 , e $S \neq \{u_1, u_2\}$, então S contém um vértice \bar{u}_3 em $V(\bar{G})$ tal que \bar{u}_3 é não adjacente para u_1 ou u_2 .

Isso implica que $H_{G\bar{G}}(\{u_1, u_2, \bar{u}_3\})$ contém dois vértices em um dos dois conjuntos V_1 e V_2 e portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, u_2, \bar{u}_3\})$, como neste caso $V(G) \subseteq H_{G\bar{G}}(\{u_1, u_2, \bar{u}_3\})$. Assim podemos supor que S contém exatamente um vértice u_1 em $V(G)$. Por simetria, podemos assumir que $u_1 \in V_1$.

Se S contém um vértice \bar{u}_2 em $V(\bar{G}) \setminus N_{\bar{G}}[\bar{u}_1]$, então u_2 é um vizinho de u_1 . Se $\bar{u}_2 \in \bar{V}_1$, então $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_2\})$. Logo, podemos assumir que $\bar{u}_2 \in \bar{V}_2$. Se $S \neq \{u_1, \bar{u}_2\}$,

então S contém um vértice \bar{u}_3 em $V(\bar{G})$ que é distinto de \bar{u}_1 and \bar{u}_2 . Independentemente de \bar{u}_3 encontrar-se em \bar{V}_1 ou \bar{V}_2 , obtemos $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\})$. Desta forma, todos elementos de S pertencem a $N_{G\bar{G}}[\bar{u}_1]$. Desde que $H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_1\}) = \{u_1, \bar{u}_1\}$, o conjunto S contém um elemento de $N_{\bar{G}}(\bar{u}_1)$, o que implica que $\bar{u}_1 \notin S$.

Se $H_{G\bar{G}}(S) \subseteq N_{G\bar{G}}[\bar{u}_1]$, então u_1 é o único vértice em $V(G)$ que está em $H_{G\bar{G}}(S)$, o que é uma contradição. Assim algum vértice \bar{u}_2 em $V(\bar{G}) \setminus N_{\bar{G}}[\bar{u}_1]$ tem dois vizinhos \bar{u}_3 e \bar{u}_4 em $N_{\bar{G}}(\bar{u}_1)$ tal que a componente de $\bar{G}[N_{\bar{G}}(\bar{u}_1)]$ que contém \bar{u}_3 contém um elemento \bar{u}_5 de S e a componente de $\bar{G}[N_{\bar{G}}(\bar{u}_1)]$ que contém \bar{u}_4 contém um elemento \bar{u}_6 de S . Portanto, $\bar{u}_2 \in \bar{V}_1$. Note que se essas duas componentes são a mesma, então $\bar{u}_5 = \bar{u}_6$ é possível. Note também que \bar{u}_3 e \bar{u}_5 podem ser distintos ou iguais. O mesmo vale para \bar{u}_4 e \bar{u}_6 . Finalmente, note que $H_{G\bar{G}[N_{G\bar{G}}[\bar{u}_1]]}(S)$ é a união de $\{u_1, \bar{u}_1\}$ e o conjunto de vértice de todas componentes de $G\bar{G}[N_{\bar{G}}(\bar{u}_1)]$ que contém pelo menos um elemento de S . Desde que u_2 é adjacente a u_1 e \bar{u}_2 , e $\bar{u}_2 \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_5, \bar{u}_6\})$, obtemos $u_2 \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_5, \bar{u}_6\})$. Desde que $u_2 \in V_1$, isto implica que $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, \bar{u}_5, \bar{u}_6\})$.

Caso 1.2 $x \in V(\bar{G})$.

Desse modo o conjunto S contém pelo menos um elemento \bar{u}_1 de $V(\bar{G})$, desde que $|N_{\bar{G}}(\bar{u})| = 1$ para $\forall \bar{u} \in \bar{G}$. Sem perda de generalidade assumimos que $\bar{u}_1 \in \bar{V}_1$.

Se S contém dois elementos $\bar{u}_1, v \in N_{G\bar{G}}(x)$, então ou $v \in N_G(x)$ ou $v \in N_{\bar{G}}(x)$, portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\bar{u}_1, v)$.

Se S contém apenas um elemento $\bar{u}_1 \in N_{\bar{G}}(x)$, então dividimos em subcasos distintos. Se $N_G(x) \not\subseteq S$, então ou $N_G(u_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ ou $N_G(u_1) \cap V_1 = \emptyset$. No primeiro caso, S contém então ou $u_2 \in N_G(u_1) \cap V_1$ ou $u_2 \in V_2$ (portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2\})$). No último caso, S contém então ou $u_2, u_3 \in V_1$ ou $u_2, u_3 \in V_2$ (portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2, u_3\})$), ou $\bar{u}_3 \in \bar{V}_2$ e $u_2 \in V_2 \cap N_G(u_3)$, ou $u_2 \in V_2$ e $\bar{u}_3 \in \bar{V}_1$ (portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3\})$). Caso contrário, S contém um vértice $\bar{u}_2 \in N_{\bar{G}}(N_{\bar{G}}(\bar{u}_1))$ e $\bar{u}_2 \in N_{\bar{G}}(N_{\bar{G}}(x))$, então $x \in H_{\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$, e portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$.

Seja $N_{\bar{G}}(x) \not\subseteq S$. Se S contém dois elementos $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \notin N_{\bar{G}}(x)$, então se $x \in H_{\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$, logo $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$. Caso contrário, S contém dois elementos $\bar{u}_1, u_2 \notin N_{\bar{G}}(x)$, tal que $d(\bar{u}_1, u_2) = 2$ e existe $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2\})$. Caso contrário, se S contém um vértice $u_3 \in N_G[u_1] \cup N_G[u_2]$, então $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3\})$. Caso contrário, S contém um vértice $u_3 \in N_G[u_1] \cup N_G[u_2]$ vizinhando um vértice u tal que $\bar{u} \in H_{\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\})$, e assim $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3\})$. Caso contrário existe um caminho P_4 e $G\bar{G}$ não é um cografo.

Se S contém um vértice $\bar{u}_2 \in \bar{V}_2$ e $x \in \bar{V}_1$, então S contém pelo menos um vértice $u_3 \in V(G) \setminus \{u_2\}$, e portanto $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3\})$. Finalmente, se S não contém vértices em \bar{V}_2 , então S contém pelo menos ou um vértice $u_2 \in N_V(u_1)$ com $N_V(u_1) = N_G(u_1) \cap (V_1 \cup V_2)$ ou dois vértices $u_2, u_3 \in V(G) \setminus N_V(u_1)$. Assim, ou $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2\})$ (no primeiro caso) ou $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2, u_3\})$ (em último caso).

Caso 2 $|V_1| = 1$ e $|V_2| \geq 2$.

Seja $|V_1| = \{u_1\}$. Se $x \neq u_1$, então $x \in V_2 \cup \bar{V}_2$, com $x \notin S$. Se $x \in V_2$, então S contém um vértice $u_2 \in V_2$ tal que se $u_2 \in N_G(x)$, logo $H(\{u_1, u_2\}) = \{u_1, x, u_2\}$ e assim $H_G(\{x, u_2\}) = V(G)$. Senão se $u_2 \notin N_G(x)$, então S contém um vértice $\bar{u}_3 \in \bar{V}_2$ tal que $x \in H(\{u_1, \bar{u}_3\})$ e logo $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_1, u_2, \bar{u}_3\})$. Se $x \in \bar{V}_2$, então S contém dois vértices onde ou $u_2 \in V_2$ e $\bar{u}_3 \in \bar{V}_2$ tal que $\bar{u}_3 \in N_{\bar{G}}(x)$, assim $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_2, \bar{u}_3\})$ ou $\bar{u}_2, \bar{u}_3 \in \bar{V}_2$ e $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\})$.

Seja $x = u_1$. Se $\bar{u}_1 \in S$, então S contém pelo menos um vértice $u_2 \in V_2$ e $x \in H_{G\bar{G}}(\{\bar{u}_1, u_2\})$. Caso contrário, então S contém pelo menos dois vértices $u_2, u_3 \in V_2$ e $x \in H_{G\bar{G}}(\{u_2, u_3\})$. \square

Nas próximas páginas tratamos sobre a convexidade geodésica. Porém, não exploramos as propriedades algorítmicas e de complexidade.

4.5 Número geodésico

Um conjunto $S \in V(G)$ é denominado *conjunto geodésico* de G se $I[S] = V(G)$. O *número geodésico*, $g_n(G)$, de um grafo G é a cardinalidade do menor conjunto geodésico de G . Na Figura 2.4, testando todos os casos, temos que $g_n(G) = 4$. Como exemplo, seja $S = \{a, \bar{b}, \bar{c}, d\}$, então $I[S] = I[a, \bar{b}] \cup I[a, \bar{c}] \cup I[a, d] \cup I[\bar{b}, \bar{c}] \cup I[\bar{b}, d] \cup I[\bar{c}, d] = V(G)$.

Determinar o número geodésico de um grafo é um interessante problema de otimização. É conhecido que a versão de decisão deste problema é NP-completo. Diversos trabalhos foram desenvolvidos sobre este tema, alguns exemplos são CÁCERES et al. [10] e DOURADO et al. [35].

O Lema a seguir é um resultado demonstrado em [24] e utilizado em nossas provas para os teoremas de número geodésico.

Lema 4.18 [24] *Cada conjunto geodésico de um grafo contém seus vértices simpliciais.*

Nesta seção, do Teorema 4.19 ao 4.21, mostraremos as caracterizações do número geodésico para prismas complementares de grafos completos, caminhos e ciclos.

Teorema 4.19 *Considere um grafo completo K_n e seja $G = K_n \bar{K}_n$. Então $g_n(G) = n$, onde n é a ordem de K_n .*

Prova. Considere $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{K}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = K_n \bar{K}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(K_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{K}_n)$.

Seja S o conjunto de todos os vértices simpliciais de G . Com base no lemma 4.18, temos que todo conjunto geodésico de um grafo contém seus vértices simpliciais,

logo $g_n(G) \geq |S|$. Por outro lado, para um vértice interno v de G , existem vértices simpliciais x, y de G , tal que v está sobre um único caminho geodésico x - y em G . Assim, $v \in I[S]$ e então $I[S] = V(G)$. Logo $g_n(G) \leq |S|$. Como $|S| = n$, portanto, $g_n(G) = n$.

□

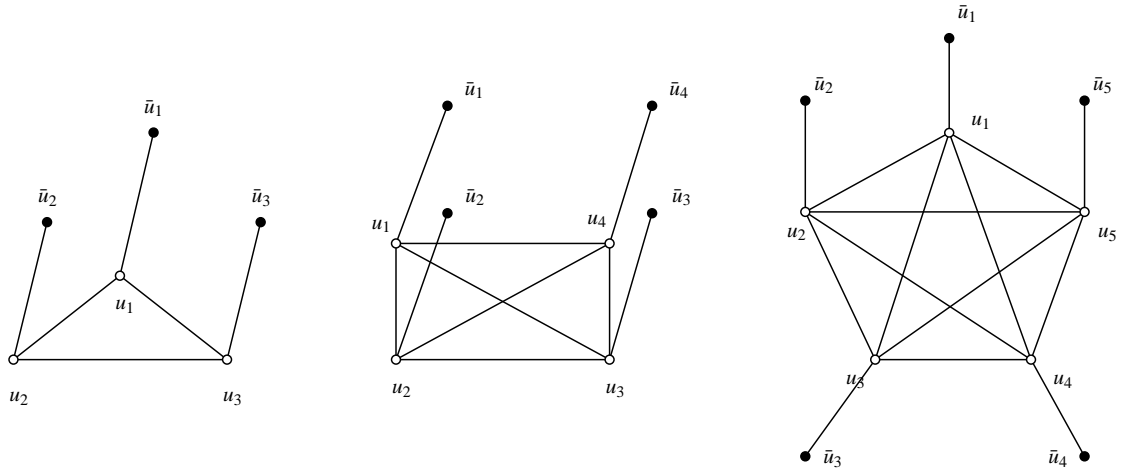


Figura 4.13: Número geodésico - $K_n \bar{K}_n$

Teorema 4.20 Considere um caminho P_n e seja $G = P_n \bar{P}_n$. Então $g_n(G) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$, para $n \geq 4$, onde n é a ordem de P_n .

Prova. Considere $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{P}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = P_n \bar{P}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(P_n) \cup V(\bar{P}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(P_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{P}_n)$.

Para $n = 4$, seja $S = \{u_1, u_n, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Note que $I[S] = V(G)$. Como $g_n(G) > 3$, logo $g_n(P_4 \bar{P}_4) = 4$.

Seja $n > 4$. Primeiramente vamos mostrar que $g_n(G) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$.

Se $S \subseteq \bar{P}_n$, então $I[S] \subseteq \bar{P}_n$. Logo, S deve conter vértices de P_n . Como $exc(G) = 3$ e para que $|S|$ tenha quantidade mínima de vértices, S deve conter a menor quantidade de vértices de P_n que distam no máximo 3. A escolha dos vértices de P_n que satisfaçam a afirmação acima é tal que no máximo uma dupla de P_n em S tenha distância no máximo 3 e as restantes distâncias exatamente 3. Portanto, $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ vértices de P_n devem estar em S . Para que os vértices de \bar{P}_n pertençam a $I[S]$, dois vértices de \bar{P}_n , $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, devem pertencer a S . Logo $g_n(G) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$.

Vamos definir recursivamente um conjunto S' . Primeiramente, $u_1 \in S'$. O vértice $u_i \in S'$ se $u_{i-3} \in S'$ e $d(u_{i-3}, u_i) = 3$, para $4 \leq i < n$. Faça $S = S' \cup \{u_n\} \cup \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Observe que $|S' \cup \{u_n\}| = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$, então $|S| = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$. Vamos mostrar que $I[S] = V(G)$.

Note que $I[\bar{u}_2, \bar{u}_3] = \bar{P}_n \setminus \{\bar{u}_1, \bar{u}_4\}$. Mas $\bar{u}_1 \in I[u_1, \bar{u}_3]$ e $\bar{u}_4 \in I[u_4, \bar{u}_2]$. Assim, $I[S'] \cup I[\bar{u}_2, \bar{u}_3] = V(G)$, ou seja, $g_n(G) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$. □

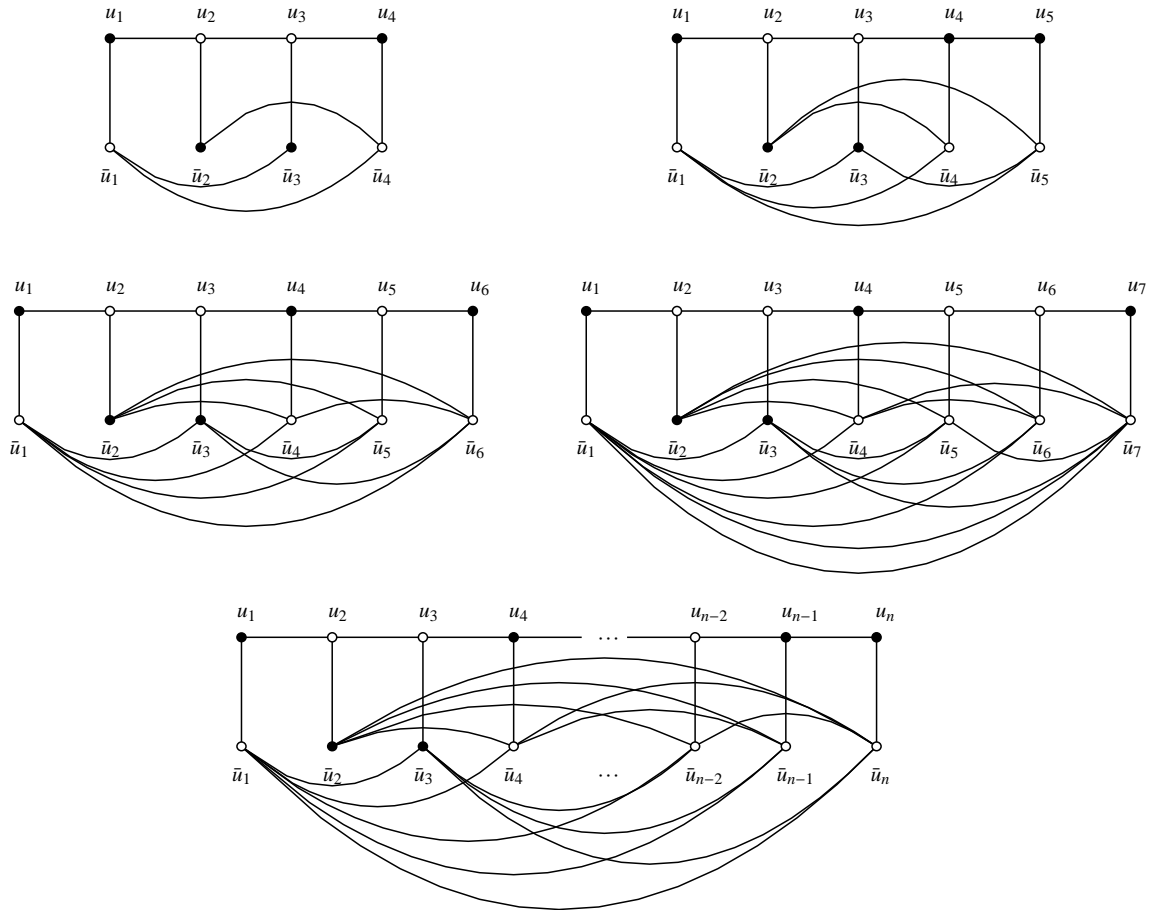


Figura 4.14: Número geodésico para prismas complementares $P_n \bar{P}_n$, com $n \geq 4$.

Para $n = 1$, $g_n(P_1 \bar{P}_1) = 2$, para $n = 2$, $g_n(P_2 \bar{P}_2) = 2$ e para $n = 3$, $g_n(P_3 \bar{P}_3) = 3$, conforme pode ser visto na Figura 4.15.

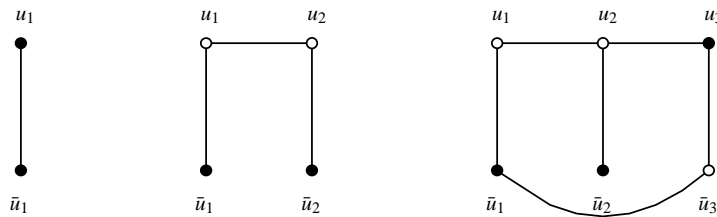


Figura 4.15: Número geodésico para prismas complementares $P_1 \bar{P}_1$, $P_2 \bar{P}_2$ e $P_3 \bar{P}_3$

O próximo teorema mostra o número geodésico para prismas complementares de ciclos C_n . Neste caso, consideramos $n \geq 4$ já que para $n = 3$ temos que $C_3\bar{C}_3 = K_3\bar{K}_3$, o qual já foi provado as operações prisma complementar para grafos completos por meio do Teorema 4.19.

Teorema 4.21 *Considere um ciclo C_n com $n \geq 4$ e seja $G = C_n\bar{C}_n$. Então $g_n(G) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$, onde n é a ordem de C_n .*

Prova. Considere $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{C}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = C_n\bar{C}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(C_n) \cup V(\bar{C}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(C_n) \cup \{u_1\bar{u}_1, \dots, u_n\bar{u}_n\} \cup E(\bar{C}_n)$.

Para $n = 4$, seja $S = \{u_1, u_n, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, note que $I[S] = V(G)$ para $n = 4, 5$ e 6 .

Seja $n > 4$. Primeiramente vamos mostrar que $g_n(G) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$.

Se $S \subseteq \bar{C}_n$, então $I[S] \subseteq \bar{C}_n$. Logo, S deve conter vértices de C_n . Como $exc(G) = 3$ e para que $|S|$ tenha quantidade mínima de vértices, S deve conter a menor quantidade de vértices de C_n que distam no máximo 3. A escolha dos vértices de C_n que satisfaçam a afirmação acima é tal que no máximo uma dupla de C_n em S tenha distância no máximo 3 e as restantes distâncias exatamente 3. Portanto $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ vértices de C_n devem estar em S . Para que os vértices de \bar{C}_n pertençam a $I[S]$, dois vértices de \bar{C}_n , $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, devem pertencer a S . Logo $g_n(G) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$.

Vamos definir recursivamente um conjunto S' . Primeiramente, $u_1 \in S'$. O vértice $u_i \in S'$ se $u_{i-3} \in S'$ e $d(u_{i-3}, u_i) = 3$, para $1 < i < n$. Faça $S = S' \cup \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Observe que $|S'| = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$, então $|S| = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$. Vamos mostrar que $I[S] = V(G)$.

Note que $I[\bar{u}_2, \bar{u}_3] = \bar{C}_n \setminus \{\bar{u}_1, \bar{u}_4\}$. Mas $\{\bar{u}_1, \bar{u}_4\} \in I[u_1, u_4]$ e $\{u_1, u_4\} \in S'$.

Assim, $I[S'] \cup I[\bar{u}_2, \bar{u}_3] = V(G)$, ou seja, $g_n(G) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$.

□

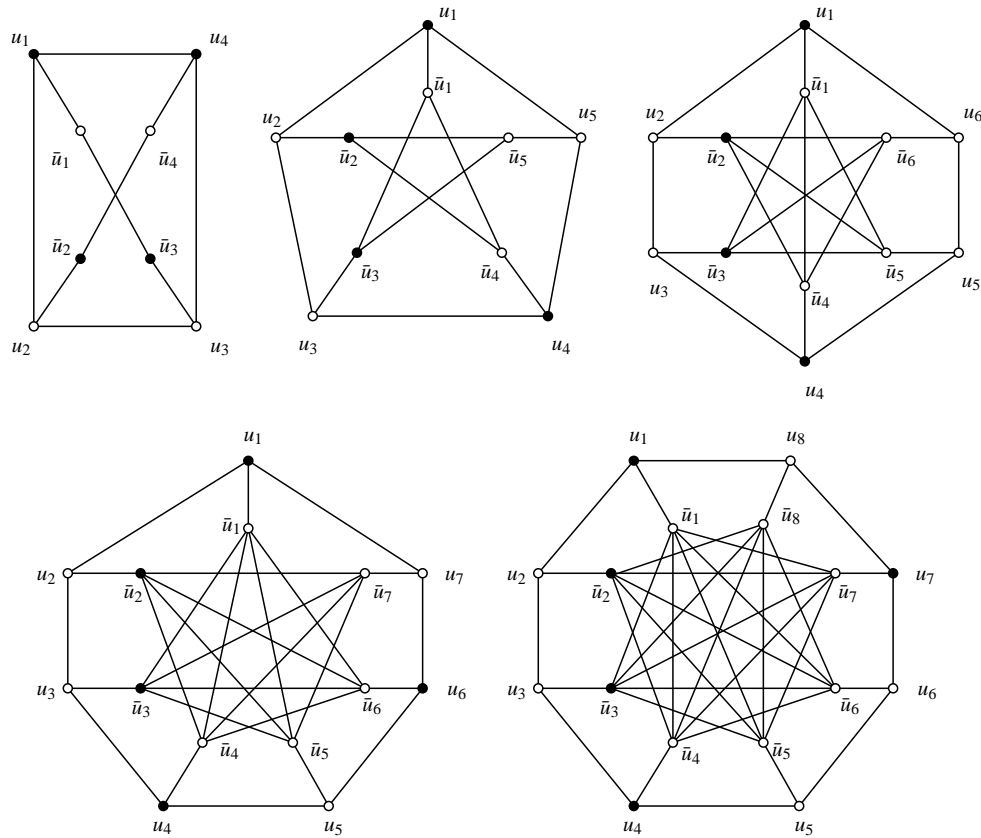


Figura 4.16: Número geodésico para prismas complementares $C_n \bar{C}_n$, com $4 \leq n \leq 8$

4.6 Número envoltório

Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotamos por $H[S]$ o menor conjunto convexo de G que contém S . Denominamos $H[S]$ por fecho convexo de S em G . Se $H[S] = V(G)$, então S é chamado conjunto envoltório de G . O número envoltório de G é a cardinalidade do menor conjunto envoltório de G .

Para uma melhor compreensão, seja $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$ e $I^k[S] = I[I^{k-1}[S]]$ para $k \geq 2$. A partir de algum termo p , a sequência será constante, então $I^p[S] = I^{p+1}[S]$, com isso obtém-se a envoltória convexa de S [16].

Do Teorema 4.22 ao 4.24 temos os resultados para o número envoltório utilizando a convexidade geodésica envolvendo prismas complementares para grafos P_n , C_n e K_n .

Teorema 4.22 *Considere um grafo completo K_n e $G = K_n \bar{K}_n$. Então $h_n(G) = n$, onde n é a ordem de K_n .*

Prova. Considere $V(K_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{K}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = K_n \bar{K}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(K_n) \cup V(\bar{K}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(K_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{K}_n)$.

Seja S o conjunto de todos os vértices simpliciais de G . Com base no Lema 4.6, temos que todo conjunto envoltório de um grafo contém seus vértices simpliciais, logo $h_n(G) \geq |S|$. Por outro lado, para um vértice interno v de G , existem vértices simpliciais x, y de G , tal que v está sobre um caminho x - y em G . Assim, $v \in H[S]$ e então $H[S] = V(G)$, logo $h_n(G) \leq |S|$. Como $|S| = n$, portanto, $h_n(G) = n$.

□

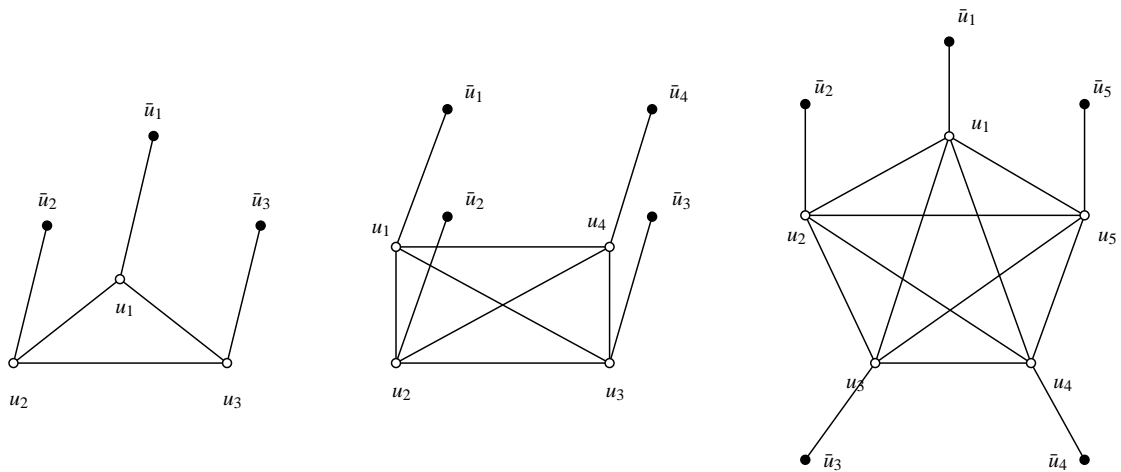


Figura 4.17: Número envoltório para $K_n \bar{K}_n$, com $3 \leq n \leq 5$

Teorema 4.23 Considere um caminho P_n e seja $G = P_n \bar{P}_n$. Então,

$$h_n(G) = \begin{cases} 3 & , \text{ se } n = 3 \\ 2 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Prova. Considere $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{P}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = P_n \bar{P}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(P_n) \cup V(\bar{P}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(P_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{P}_n)$.

Seja n um inteiro positivo e $n \neq 3$. Para $n = 1$ e $n = 2$, temos um único caminho e $h_n(P_n) = 2$, como pode ser visto na Figura 4.18. Para $n \geq 4$, seja $S = \{u_1, u_4\}$, então $I[S] = \{u_1, u_2, u_3, u_4, \bar{u}_1, \bar{u}_4\}$, $I^2[S] = \{u_1, u_2, u_3, u_4, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ e $I^3[S] = \bar{P}_n \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Como $\bar{P}_n \subset I^3[S]$, resta mostrar que $P_n \subset I^\alpha[S]$. Note que todo $\bar{u}_k \in \bar{P}_n$, $4 < k \leq n$ possui distância dois a u_{k-1} , desta forma todo u_k pertencerá a $I^\alpha[S]$, onde $3 < \alpha \leq n$. Logo $H[S] = V(G)$, e portanto $h_n(G) = 2$, para $n \leq 2$ e $n \geq 4$.

Para $n = 3$ temos a seguinte situação. Se \bar{u}_2 é o vértice folha de $P_n\bar{P}_n$, pelo Lema 4.6, $\bar{u}_2 \in S$. Desta forma, a maior distância de \bar{u}_2 a um outro vértice de $P_n\bar{P}_n$ é $d = 3$, implicando na existência de dois vértices \bar{u}_1 e \bar{u}_3 . Seja $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$, então $H[S] = \{\bar{u}_2, u_2, u_1, \bar{u}_1\}$, ou seja, $H[S] \neq V(G)$. Por outro lado, se $S = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, então $H[S] = \{\bar{u}_2, u_2, u_3, \bar{u}_3\}$, ou seja, $H[S] \neq V(G)$. Portanto, $|S| > 2$. Assim, caso $\bar{u}_1 \in S$, é necessário incluir mais um vértice, cuja distância seja maior tanto em relação a \bar{u}_2 quanto a \bar{u}_1 . Desta forma, se $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3\}$, então $H[S] = V(G)$. Por outro lado $S = \{u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, então $H[S] = V(G)$. Portanto, $h_n(P_3\bar{P}_3) = 3$.

□

O próximo teorema mostra o número envoltório para prismas complementares de ciclos C_n . Neste caso, consideramos $n \geq 4$ já que para $n = 3$ temos que $C_3\bar{C}_3 = K_3\bar{K}_3$, o qual já foi provado as operações prisma complementar para grafos completos por meio do Teorema 4.22.

Teorema 4.24 *Considere um ciclo C_n e seja $G = C_n\bar{C}_n$. Então,*

$$h_n(G) = \begin{cases} 2 & , \text{ se } n \geq 6 \\ 3 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

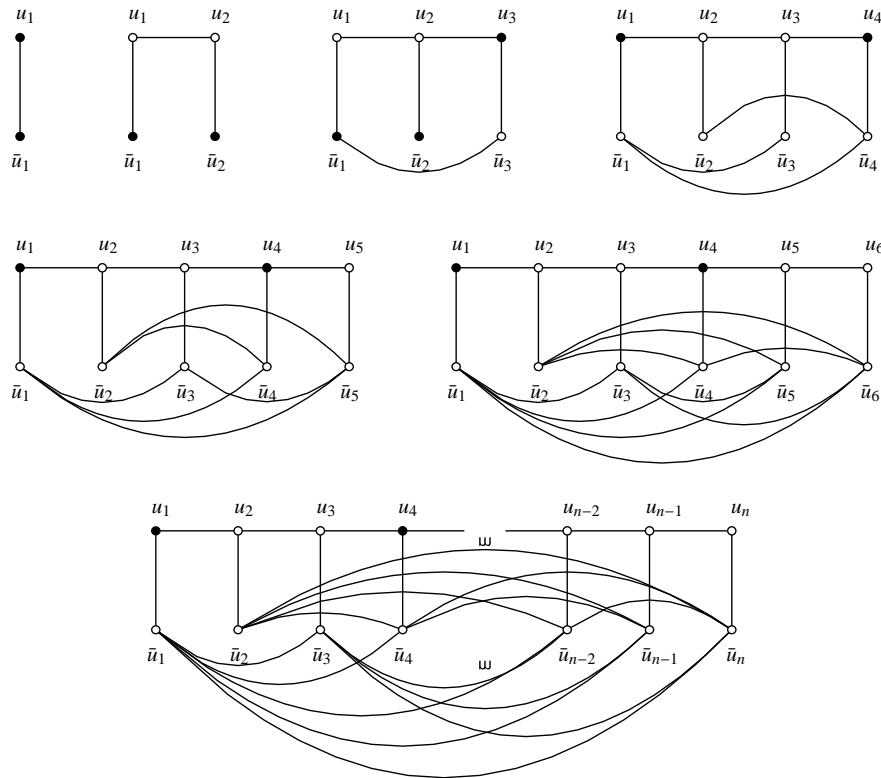


Figura 4.18: Número envoltório para prismas complementares $P_n \bar{P}_n$

Prova. Considere $V(C_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e $V(\bar{C}_n) = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$. $G = C_n \bar{C}_n$ é composto pelo conjunto de vértices $V = V(C_n) \cup V(\bar{C}_n)$ e o conjunto de arestas $E(G) = E(C_n) \cup \{u_1 \bar{u}_1, \dots, u_n \bar{u}_n\} \cup E(\bar{C}_n)$.

Seja $n \geq 6$, como $exc(G) = 3$, seja $S = \{u_1, u_4\}$, já que $d(u_1, u_4) = 3$. Note que $I[S] \supset \{u_1, u_2, u_3, u_4, \bar{u}_1, \bar{u}_4\}$, $I^2[S] \supset \{u_1, u_2, u_3, u_4, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ e que $I^3[S] \subseteq \bar{C}_n \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Como $\bar{C}_n \subset I^3[S]$, resta mostrar que $C_n \subset I^\alpha[S]$. Note que todo $u_k \in C_n$, $4 < k \leq n$ está sobre um caminho mínimo $u_{k-1} \bar{u}_k$, onde $\{u_{k-1}, \bar{u}_k\} \in I^3[S]$. Assim todo u_k pertencerá a algum $I^\alpha[S]$, onde $3 < \alpha \leq n$. Logo $H[S] = V(G)$, e portanto $h_n(G) = 2$, para $n \geq 6$.

Para $n = 3$, o resultado já foi mostrado no Teorema 4.22, já que $C_3 \bar{C}_3 = K_3 \bar{K}_3$. Para $n = 4$ e 5 , seja $S = \{u_i, u_j\}$, se $d(u_i, u_j) = 2$, então $H[S] \subseteq C_n \cup \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$. Caso contrário $H[S] = \{u_i, u_j\}$. Seja $S = \{u_i, \bar{u}_j\}$, e $d(u_i, \bar{u}_j) = 2$, então $H[S] = \{u_i, x, \bar{u}_j\}$, onde $x \in C_n$ ou $x \in \bar{C}_n$. Caso contrário $H[S] = \{u_i, \bar{u}_j\}$. Por fim, seja $S = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$, e $d(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = 2$, então $H[S] = \{\bar{u}_i, u_i, u_j, \bar{u}_j\}$ ou $H[S] = \{\bar{u}_i, x, \bar{u}_j\}$, onde $x \in \bar{C}_n$. Caso contrário $H[S] = \{\bar{u}_i, \bar{u}_j\}$. Portanto $h_n(G) > 2$. Seja $S = \{u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ e $n = 4$. Note que $I[S] = V(G) \setminus \{u_4, \bar{u}_4\}$, $I^2[S] = V(G) \setminus \{\bar{u}_4\}$ e que $I^3[S] = V(G)$, logo $H[S] = V(G)$. Para $n = 5$ note que $I[S] = \{u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_5\}$, $I^2[S] = V(G) \setminus \{u_4\}$ e que $I^3[S] = V(G)$, logo $H[S] = V(G)$. Portanto para $n = 4$ e 5 , $h_n(G) = 3$. \square

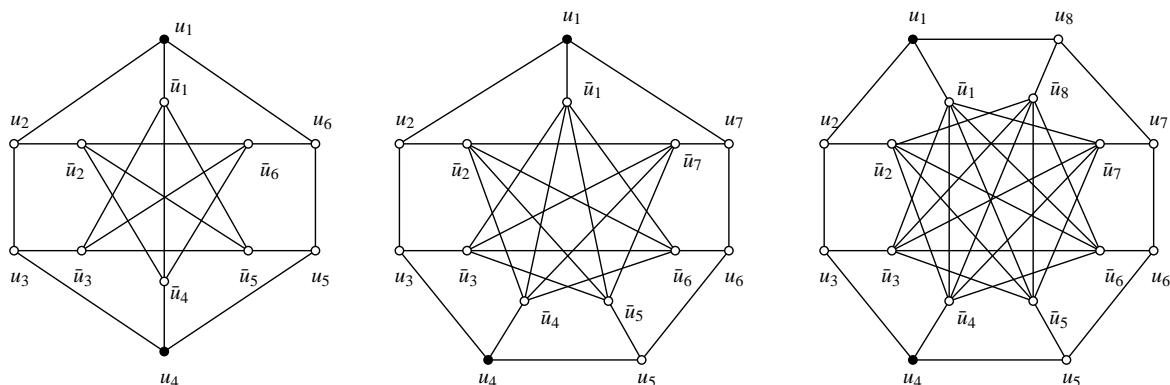


Figura 4.19: Número envoltório para prismas complementares $C_n \bar{C}_n$, com $n = 6, 7$ e 8 .

Para $n = 4$ e 5 , o resultado de $h_n(G) = 3$, pode ser visto conforme a Figura 4.20.

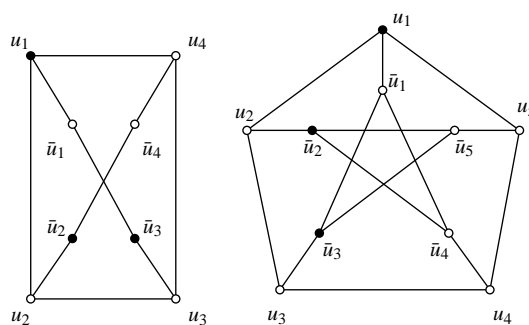


Figura 4.20: Número envoltório - $C_4 \bar{C}_4$ e $C_5 \bar{C}_5$

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos principalmente as atuações das convexidades P_3 e geodésica aplicadas sobre as operações prismas complementares de grafos simples, conexos, finitos e não direcionados.

Mostramos em [38] que o cálculo do número P_3 é NP-completo para prismas complementares de grafos em geral, sendo que para o número envoltório P_3 o mesmo pode ser calculado de forma eficiente em tempo polinomial, o que foi surpreendente.

Quanto ao número de Carathéodory mostramos em [38] que o cálculo deste é NP-completo para os prismas complementares de grafos bipartidos. O mesmo não acontece para o prisma complementar da classe dos grafos árvore, sendo que para essa classe o cálculo do número de Carathéodory pode ser realizado em tempo polinomial. Ainda estabelecemos um limite superior e inferior para classe dos cografos, onde o cálculo do número de Carathéodory do prisma complementar desses é 3.

Em vista do Teorema 4.10, conseguimos estabelecer uma relação entre a cardinalidade de um conjunto de Carathéodory de um grafo qualquer e um conjunto de Carathéodory do seu prisma complementar, o que gerou a Proposição 4.11 baseada também nos parâmetros de grau e ordem de um grafo.

Além disso, dado um grafo G e um inteiro k , demonstramos em [38] que é NP-completo decidir se $G\bar{G}$ tem uma clique de ordem k , um conjunto independente de ordem k e um conjunto com k -dominantes para o prisma complementar de grafos em geral, o que respondeu algumas questões deixadas em aberto por Haynes et al. [51].

Em relação à convexidade geodésica, caracterizamos os parâmetros número geodésico e número envoltório para o prisma complementar de caminhos, completos e ciclos. Os mesmos grafos também foram caracterizados para a convexidade P_3 em relação aos parâmetros número P_3 , número envoltório P_3 e número de Carathéodory. Os resultados dessas caracterizações podem ser vistos na Tabela 5.1.

Um problema ainda em aberto é estudar as propriedades algorítmicas e de complexidade para a convexidade geodésica em relação as operações prisma complementar para grafos em geral. Pretendemos também, levar o estudo de convexidade para outros tipos de operações relacionadas ao produto de grafos, como produto cartesiano, produto

lexográfico, produto forte e outros que ainda não tenham sido explorados. Também, sugerimos a verificação dos parâmetros estudados utilizando outras convexidades, como as convexidades monofônica, triangular e $m3$.

Tabela 5.1: Caracterizações de n_{p3} , h_{p3} , c_{p3} , g_n e h_n para $K_n\bar{K}_n$, $P_n\bar{P}_n$ e $C_n\bar{C}_n$

	$K_n\bar{K}_n$	$P_n\bar{P}_n$	$C_n\bar{C}_n$
n_{p3}	$n+1$	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$
h_{p3}	$n+1$	2 , se $n \geq 6$ 3 , se $2 \leq n \leq 5$	2 , se $n \geq 7$ 3 , se $4 \leq n \leq 6$
c_{p3}	2	3	3
g_n	n	$\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil + 2$	$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2$
h_n	n	3 , se $n = 3$ 2 , caso contrário	2 , se $n \geq 6$ 3 , caso contrário

Referências Bibliográficas

- [1] ATICI, M. **Computational Complexity of Geodetic Set**. *Internt Journal Computer Mathematics*, (5):587–591, 2002.
- [2] BALOGH, J.; PETE, C. **Random Disease on the Square Grid**. *Random Structures Algorithms*, (13):409–422, 1998.
- [3] BARBOSA, R. M.; COELHO, E. M. M.; DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. L. **On the Carathéodory Number for the Convexity of Paths of Order Three**. 2010.
- [4] BATTEN, L. M. **Geodesic Subgraphs**. *Journal of Graph Theory*, (7):159–163, 1972.
- [5] BLIDIA, M.; CHELLALI, M.; FAVARON, O. **Independence and 2-Domination in Trees**. *Australasian Journal of Combinatorics*, (33):317–327, 2005.
- [6] BOLLOBÁS, B. **The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis**. *Cambridge University Press*, 2006.
- [7] BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)**. *Springer, New York*, 2008.
- [8] BRANSTÄDT, A.; DRAGAN, F.; NICOLAI, F. **Convexity and HHD-free Graphs**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, (12):119–135, 1999.
- [9] BUCKLEY, F.; HARARY, F. **Distance in Graphs**. *Addison-Wesley Publishing Company*, 1990.
- [10] CÁCERES, J.; HERNANDO, C.; MORA, M. **On geodetic sets formed by boundary vertices**. *Discrete Mathematics*, 60(306):188–198, 2006.
- [11] CÁCERES, J.; HERNANDO, C.; MORA, M.; PELAYO, I. M.; PUERTAS, M. L. **On the geodetic and the hull numbers in strong product graphs**. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(11):3020–3031, 2010.

- [12] CAPPELLE, M.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D. **Recognizing Some Complementary Products**. *Theoretical Computer Science archive*, (521):1–7, 2014.
- [13] CARATHÉODORY, C. **Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen**. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palerm*, 32:193–217, 1911.
- [14] CARO, Y.; RODITTY, Y. **A Note on the k-Domination Number of a Graph**. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, (13):205–206, 1990.
- [15] CÁCERES, J.; HERNANDO, C.; MORA, M.; PUERTAS, M.; SEARA, C. **On Monophonic Sets in Graphs**. *20th British Combinatorial Conference, Durham - England*, 2005.
- [16] CENTENO, C. C. **A Convexidade P3 para Grafos não Direcionados**. *PhD thesis, UFRJ/COPPE*, 2012.
- [17] CENTENO, C.; DOURADO, M.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. **Irreversible Conversion of Graphs**. *Theoretical Computer Science*, (412):3693–3700, 2011.
- [18] CHALUVARAJU, B.; CHAITRA, V. **Roman domination in complementary prism graphs**. *Journal Mathematics Combinatorial*, (2):24–31, 2012.
- [19] CHANGAT, M.; MATHEW, J. **On Triangle Path Convexity in Graphs**. *Discrete Mathematics*, (206):91–95, 1999.
- [20] CHANGAT, M.; MULDER, H.; SIERKSMA, G. **Convexities Related to Path Properties on Graphs**. *Discrete Mathematics*, (290):117–133, 2005.
- [21] CHARTRAND, G.; FINK, J.; ZHANG, P. **The Hull Number of Oriented Graph**. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, p. 2265–2275, 2003.
- [22] CHARTRAND, G.; HARARY, F.; ZHANG, P. **Geodetic Sets in Graphs**. *Discrete Mathematics Graph Theory*, (20):129–138, 2000.
- [23] CHARTRAND, G.; PALMER, E.; ZHANG, P. **The Geodetic Number of a Graph: a Survey**. *Congressus Numerantium*, (156):37–58, 2002.
- [24] CHARTRAND, G.; HARARY, F. **On the Geodetic Number of a Graph**. *Networks*, 39(2):1–6, 2002.
- [25] CHARTRAND, G.; WALL, C. E.; ZHANG, P. **The Convexity Number of a Graph**. *Graphs and Combinatorics*, p. 209–217, 2002.

- [26] CHELLALI, M. **Bounds on the 2-Domination Number in Cactus Graphs.** *Opuscula Mathematica*, (26):5–11, 2006.
- [27] COELHO, E. M. **Resultados de Complexidade Relativos ao Teorema de Helly Colorido e o Número de Carathéodory.** *PhD thesis, UFRJ/COPPE*, 2012.
- [28] DE VEL, M. J. L. V. **Theory of Convex Structures.** *Amsterdam, North-Holland*, 1993.
- [29] DELAVIÑA, E.; LARSON, E.; PEPPER, R.; WALLER, B. **Graffiti.pc on the 2-Domination Number of a Graph.**
- [30] DESORMEAUX, W.; HAYNES, T. **Restrained domination in complementary prisms.** *Util. Mathematics*, (86):267–278, 2011.
- [31] DESORMEAUX, W.; HAYNES, T.; VAUGHAN, L. **Double domination in complementary prisms.** *Util. Mathematics*, (91):131–142, 2011.
- [32] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. **On the Complexity of the Geodetic and Convexity Numbers of a Graph.** *Lecture Notes of the Ramanujan Mathematical Society*, (7):497–500, 2006.
- [33] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. **Algorithmic Aspects of Monophonic Convexity.** *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, (30):177–182, 2008.
- [34] DOURADO, M.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. **On the Hull Number of Triangle Free Graphs.** *Siam Journal on Discrete Mathematics*, (23):2163–2172, 2010.
- [35] DOURADO, M. C.; GIMBEL, J. G.; KRATOCHVÍL, J.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. **On the computation of the hull number of a graph.** *Discrete Mathematics*, 309(18):5668–5674, 2009.
- [36] DUARTE, M. A.; JOOS, F.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SOUZA, U. S. **Maximum Induced Matchings close to Maximum Matchings.** *Theoretical Computer Science (Aceito)*, 2014.
- [37] DUARTE, M. A.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SOUZA, U. S. **Remarks on Complementary Prisms.** *Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, 2014.
- [38] DUARTE, M. A.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SOUZA, U. S. **Complexity Properties of Complementary Prisms.** *Journal of Combinatorial Optimization (Aceito)*, 2015.

- [39] DUARTE, M. A.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SOUZA, U. S.; SZWARCFITER, J. L. **The P3-Convexity in the Complementary Prism of a Graph (Aceito)**. *13th Cologne-Twente Workshop on Graphs Combinatorial Optimization*, 2015.
- [40] DUCHET, P. **Convexity in Graphs II. Minimal Path Convexity**. *Journal of Combinatorial Theory*, (44):307–316, 1988.
- [41] ECKHOFF, J. **Helly, Radon, and Carathéodory type theorems**. In: P.M. Gruber, J.M. Wills (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, Noth-Holland, Amsterdam, 32:389–448, 1993.
- [42] ERDÖS, P.; FRIED, E.; HAJNAL, A.; MILNER, E. **Some Remarks on Simple Tournaments**. *Algebra Universalis*, (2):238–245, 1972.
- [43] EVERETT, M. G.; SEIDMAN, S. B. **The Hull Number of a Graph**. *Discrete Mathematics*, 57:217–223, 1985.
- [44] FARBER, M.; JAMISON, R. **Convexity in Graphs and Hypergraphs**. *SIAM Journal Algebraic and Discrete Methods*, (7):433–444, 1988.
- [45] FAVARON, O.; HANSBERG, A.; VOLKMANN, L. **On K-Domination an Minimum Degree in Graphs**. *Journal of Graph Theory*, p. 33–40, 2007.
- [46] FUJISAWA, J.; HANSBERG, A.; KUBO, T.; SAITO, A.; SUGITA, M.; VOLKMANN, L. **Independence and 2-Domination in Bipartite Graphs**. *Australasian Journal of Combinatorics*, (40):265–268, 2008.
- [47] GIMBEL, J. G. **Some Remarks on the Convexity Number of a Graph**. *Graphs and Combinatorics*, (19):357–361, 2003.
- [48] GONGORA, J.; HAYNES, T.; JUM, E. **Independent domination in complementary prisms**. *Util. Mathematics*, (91):3–12, 2013.
- [49] HAGLIN, D.; WOLF, M. **On Convex Subsets in Tournaments**. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, (9):63–70, 1994.
- [50] HARARY, F.; NIEMINEN, J. **Convexity in Graphs**. *Journal Differential Geometry*, (16):185–190, 1981.
- [51] HAYNES, T.; SLATER, P. J.; MERWE, L. C. **The complementary product of two graphs**. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30, 2007.
- [52] HAYNES, T.; HEDETNIEMI, S.; SLATER, P. **Fundamentals of domination in graphs**. *Marcel Dekker, New York*, 1998.

- [53] HAYNES, T.; HENNING, M.; VAN DER MERWE, L. **Domination and total domination in complementary prisms.** *Journal of Combinatorial Optimization*, (18):23–37, 2009.
- [54] HAYNES, T.; HOLMES, K.; KOESSLER, D.; SEWELL, L. **Locating-domination in complementary prisms of paths and cycles.** *Congressus Numerantium*, (199):45–55, 2009.
- [55] HERNANDO, C.; MORA, M.; PELAYO, I.; SEARA, C. **On Monophonic Sets in Graph.** *Journal of Combinatorial Theory series B*.
- [56] HERNANDO, C.; MORA, M.; PELAYO, I.; SEARA, C. **On Geodetic and Monophonic Convexity.** *20th European Workshop on Computational Geometry, Sevilla (Spain)*, 2004.
- [57] HOLMES, K.; KOESSLER, D.R.AND HAYNES, T. **Locating-domination in complementary prisms.** *Journal Mathematics Combinatorial Computer*, (72):163–171, 2010.
- [58] KATHIRESAN, K.; AROCKIARAJ, S. **Wiener indices of generalized complementary prisms.** *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, (59):31–45, 2010.
- [59] KAY, D.; BREEN, M. **Convexity and Related Combinatorial Geometry: proceedings of the second University of Oklahoma conference.** *New York, M. Dekker*, 1982.
- [60] KAZEMI, A. **k -tuple total domination in complementary prisms.** *ISRN Discrete Mathematics. 2011, Article ID 681274*, (13), 2011.
- [61] MEIERLING, D.; PROTTI, F.; RAUTENBACH, D.; RIBEIRO DE ALMEIDA, A. **Cycles in Complementary Prisms.** *manuscript*, 2013.
- [62] MOON, J. **Embedding Tournaments in Simple Tournaments.** *Discrete Mathematics*, (2):389–395, 1972.
- [63] NIEMINEN, J. **Characterizations of Graphs by Convex Hulls.** *Bulletin of the Institute of Mathematics*, (10):177–184, 1982.
- [64] PARKER, D.; WESTHOFF, R.; WOLF, M. **Two-Path Convexity and Bipartite Tournaments of Small Rank.** *Ars Combinatoria*.
- [65] PARKER, D.; WESTHOFF, R.; WOLF, M. **On Two-Path Convexity in Multipartite Tournaments.** *European Journal of Combinatorics*, (29):641–651, 2008.

- [66] PELAYO, I. M. **On convexity in graphs.** *Technical report, Online:* <http://www.ma3.upc.es/users/pelayo/research/Definitions.pdf>, p. 1–21, 2004.
- [67] POLJAK, S. **A note on stable sets and colorings of graphs.** *Commentat. Mathematica Univ. Carol.*, (15):307–309, 1974.
- [68] RAUTENBACH, D.; VOLKMANN, L. **New Bounds on the k-Domination Number and the k-Tuple Domination Number.** *Applied Mathematics Letters*, (20):98–102, 2007.
- [69] SOUZA, U. S.; RAUTENBACH, D.; PENSO, L. D.; JOOS, F.; DUARTE, M. A. **On Graphs with Induced Matching Number Almost Equal to Matching Number.** *VIII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS)*, 2015.
- [70] VARLET, J. **Convexity in Tournaments.** *Bulletin Société Royale des Sciences de Liège*, (45):570–586, 1976.